MICKAËL LAUNAY

MARELE ROMAN AL MATEMATICII

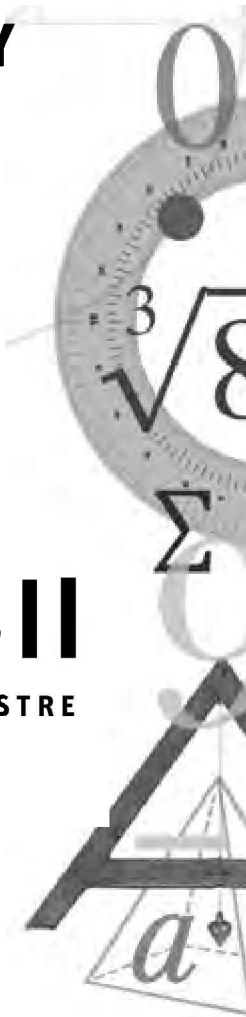
DIN PREISTORIE
ÎN ZILELE NOASTRE

MICKAËL LAUNAY

MARELE ROMAN AL MATEMATICII

DIN PREISTORIE ÎN ZILELE NOASTRE

Traducere din limba franceză de
Pompiliu Alexandru



3
TREI

Editori:
Silviu Dragomir
Vasile Dem. Zamfirescu

Director editorial:
Magdalena Mărculescu

Redactare:
Carmen Eberhat, Tudor Călin Zarojanu

Ilustrație și design copertă:
Andrei Gamarț

Director producție:
Cristian Claudiu Coban

Dtp:
Carusel Multimedia

Corectură:
Irina Mușătoiu
Dușa Udrea-Boborel

Conținutul acestei lucrări electronice este protejat prin copyright (drepturi de autor), iar cartea este destinată exclusiv utilizării ei în scop privat pe dispozitivul de citire pe care a fost descărcată. Orice altă utilizare, incluzând împrumutul sau schimbul, reproducerea integrală sau parțială, multiplicarea, închirierea, punerea la dispoziția publică, inclusiv prin internet sau prin rețele de calculatoare, stocarea permanentă sau temporară pe dispozitive sau sisteme cu posibilitatea recuperării informației, altele decât cele pe care a fost descărcată, revânzarea sub orice formă sau prin orice mijloc, fără consințământul editorului, sunt interzise. Dreptul de folosință al lucrării nu este transferabil.
Drepturile de autor pentru versiunea electronică în formatele existente ale acestei lucrări aparțin persoanei juridice Editura Trei SRL.

Titlul original: Le grand roman des maths. De la préhistoire à nos jours
Autor: Mickaël Launay

Copyright © Editions Flammarion, 2016

Copyright © Editura Trei, 2021
pentru prezenta ediție

O.P. 16, Ghișeul 1, C.P. 0490, București
Tel.: +4 021 300 60 90 ; Fax: +4 0372 25 20 20
e-mail: comenzi@edituratrei.ro
www.edituratrei.ro

ISBN (print): 978-606-40-0625-7
ISBN (PDF): 978-606-40-1171-8

Cuprins

1. Matematicieni, fără să vrea 11
2. Și a apărut numărul 26
3. Nimeni nu intră aici dacă nu este geometru 41
4. Epoca teoremelor 57
5. Un pic de metodă 78
6. De la π la și mai și 92
7. Nimic și mai puțin decât nimic 108
8. Puterea triunghiurilor 122
9. Spre o necunoscută 142
10. Șiruri 155
11. Lumile imaginare 167
12. Un limbaj pentru matematică 183
13. Alfabetul lumii 202
14. Infinitul mic 217
15. Măsurarea viitorului 232
16. Apariția mașinilor 252
17. Matematicile viitorului 271
18. Epilog 291
19. Pentru a merge mai departe 295
20. Bibliografie 299

– Din păcate, mereu am fost slabă la matematică!

Sunt puțin cam descurajat. Cred că este a zecea oară când aud această frază pe ziua de azi.

Și totuși, iată că a trecut mai mult de un sfert de oră de când această doamnă s-a oprit la standul meu, printre alți trecători, și ascultă atent cum prezint diverse curiozități geometrice. Și în acest moment a venit lovitura de grație:

— De fapt, cu ce vă ocupați dumneavoastră? m-a întrebat ea.

— Sunt matematician.

— Din păcate, mereu am fost slabă la matematică!

— Chiar așa? Cu toate astea, ceea ce povesteam părea că vă interesează.

— Da… dar aici nu e vorba chiar de matematică… înțeleg ceea ce spuneți.

Hopa, pe asta nu am mai auzit-o până acum. Matematica ar fi, prin definiție, o disciplină pe care nu o putem înțelege?

Suntem la începutul lui august, pe strada Félix Faure, la Flotteen-Ré. În acest mic târg estival, am la dreapta mea un stand de tatuaje cu hena și șuvițe africane, la stânga — un vânzător de accesorii pentru telefoane mobile, iar în fața mea, o tarabă cu bijuterii și gablonzuri de toate felurile. Între toate acestea, mi-am instalat și eu standul de matematică. În răcoarea serii, turiștii se perindă liniștiți. Îmi place în mod deosebit să fac matematică în locuri neobișnuite, mai ales acolo unde oamenii se așteaptă cel mai puțin să o întâlnească. Într-un mediu unde nu sunt inhibați…

— Când le-oi spune părinților că am făcut matematică în timpul vacanței..., îmi zice în treacăt un licean, venind de la plajă.

E adevărat, nu iau oamenii prea în serios, dar îi iau așa cum sunt. Unul dintre momentele mele preferate este să observ expresiile celor care se considerau iremediabil certați cu matematica, atunci când le arăt că tocmai au făcut matematică timp de un sfert de oră. Iar standul meu nu se golește! Le prezint origami, magie, jocuri, enigme... Am de toate, pentru toate gusturile și pentru toate vârstele.

Mă distrez, dar în adâncul meu sunt dezamăgit. Cum s-a ajuns, oare, ca oamenii să nu-și dea seama că a face matematică poate fi o plăcere? De ce cuvântul „matematică" generează atâta frică? Cu siguranță că, dacă aș fi pus deasupra mesei o pancartă pe care aș fi scris „Matematică" — așa cum sunt la standurile din jurul meu „Bijuterii și coliere", „Telefoane" sau „Tatuaje" —, nu aș fi avut nici măcar un sfert din succesul pe care îl am. Lumea nu s-ar fi oprit. Poate că m-ar fi ocolit, întorcând privirea. Totuși curiozitate există. Constat acest lucru în fiecare zi. E adevărat că matematica provoacă frică, dar fascinează cu mult mai mult. Nu ne place, dar jinduim să ne placă! Sau, cel puțin, să fim capabili să aruncăm un ochi indiscret spre miezul misterelor sale adânci. O considerăm inaccesibilă. Dar nu este așa! Putem foarte bine să iubim muzica fără să fim muzicieni sau să apreciem o masă gustoasă fără să fim mari bucătari. Atunci de ce ar trebui să fii matematician sau să ai o inteligență excepțională pentru a pleca urechea la povestea matematicii ori să-ți gâdili spiritul cu algebra sau geometria? Nu e necesar să intri în detalii tehnice pentru a înțelege marile idei și pentru a putea să te minunezi de ele.

Încă din negura timpurilor au existat numeroși artiști, creatori, inventatori, artizani sau pur și simplu visători și curioși care au făcut matematică fără să știe. Erau matematicieni, în ciuda tuturor aparențelor! Au fost primii care au pus întrebări, care au cercetat, primii care și-au pus mintea la treabă. Dacă dorim să înțelegem esența matematicii, trebuie să pornim pe urmele acestora, căci cu ei a început totul.

Așadar, a venit timpul să începem călătoria. Dacă sunteți de acord, permiteți-mi ca în următoarele pagini să vă însoțesc prin hățișurile uneia dintre disciplinele cele mai fascinante și uimitoare pe care le-a creat specia umană. Să-i cunoaștem pe cei care au contribuit la istoria sa prin descoperiri neașteptate și idei fabuloase!

Să deschidem împreună Marele roman al matematicii*!*

1

Matematicieni, fără să vrea

Revenit la Paris, am decis să deschid cercetarea noastră pornind din inima capitalei, de la muzeul Luvru. Să faci matematică la Luvru? Asta ar putea să pară cam deplasat. Fosta rezidență regală este astăzi mai degrabă domeniul pictorilor, sculptorilor, arheologilor sau istoricilor decât al matematicienilor. Cu toate acestea, aici ne pregătim să căutăm primele urme matematice.

Încă de la intrare ne întâmpină marea piramidă de sticlă care tronează în centrul curții Napoleon, iar asta este deja o invitație la geometrie. Dar astăzi avem întâlnire cu un trecut mult mai îndepărtat. Intru în muzeu și mașina timpului pornește. Merg prin fața regilor Franței, pășesc spre Renaștere și Evul Mediu pentru a ajunge, în sfârșit, la Antichitate. Trec dintr-o sală în alta, întâlnesc câteva statui romane, vaze grecești și sarcofage egiptene. Merg mai departe. Iată că intru în preistorie și, trecând prin secole, încet-încet trebuie să uit totul. Să uităm numerele! Să uităm geometria! Să uităm scrierea! La început, nimeni nu știa nimic. Nici măcar că ar exista ceva de cunoscut.

Prima oprire este în Mesopotamia: iată-ne întorși cu zece mii de ani în urmă!

Dacă mă gândesc mai bine, aș fi putut merge și mai departe. Să parcurgem peste un milion de ani pentru a ne regăsi în plin Paleolitic! Focul nu fusese încă domesticit în epoca aceea și *Homo sapiens* nu era decât un proiect îndepărtat. Ne găsim pe teritoriul lui *Homo erectus* în Asia, a lui *Homo ergaster* în Africa și poate al câtorva rude ale acestora, care ar merita descoperite. Este epoca pietrei cioplite, iar la modă este toporul din piatră.

Într-un colț al taberei, cioplitorii se află la muncă. Unul dintre aceștia ia o bucată de silex, încă în formă brută, așa cum a găsit-o cu câteva ore mai devreme. Se așază direct pe pământ — probabil cu picioarele încrucișate —, pune piatra jos, o ține cu o mână, iar cu cealaltă îi lovește marginea cu o altă piatră mai mare. Sare o primă așchie din ea. Omul observă rezultatul, răsucește silexul și îl lovește a doua oară în altă parte. Primele două așchii fiind astfel îndepărtate, lasă în loc o muchie tăioasă pe marginea silexului. Nu rămâne decât să repete operațiunea pe toată circumferința pietrei. În câteva locuri, silexul este prea gros sau prea mare și trebuie să-i fie îndepărtate părțile în plus pentru a da obiectului final forma dorită.

Acest lucru se întâmplă deoarece forma toporului nu este lăsată la întâmplare și nici conform inspirației de moment. Forma aceasta este gândită, prelucrată, transmisă din generație în generație. Și ca atare, se găsesc diferite modele în funcție de epoca și locul fabricării lor. Uneori au forma unei picături de apă cu un vârf proeminent, alteori sunt mai rotunjite și au profilul unui ou, în timp ce unele se aseamănă foarte mult cu un triunghi isoscel cu laturile ușor bombate.

Topor din Paleoliticul inferior

Indiferent de formă, toate aceste obiecte au un punct comun: o axă de simetrie. Să fi ajuns strămoșii noștri la această geometrie din motive practice sau au ales aceste forme doar din considerente estetice? E greu de știut acest lucru. Sigur este că această simetrie nu poate fi rezultatul întâmplării. Cioplitorul trebuia să-și premediteze loviturile. Adică trebuia să gândească forma finală înainte de a o realiza. Era necesar să-și construiască o imagine mentală, abstractă a obiectului care trebuia realizat. Cu alte cuvinte, trebuia să facă matematică.

După ce a terminat, cioplitorul își observă noua unealtă, o privește în lumină pentru a-i vedea mai bine curbele, reajustează câteva muchii prin două sau trei lovituri suplimentare și iată-l, în sfârșit, mulțumit. Ce simte, oare, în acest moment? Trăiește el deja acea exaltare formidabilă pe care o dă creația științifică? Adică are acel presentiment că știe, prin intermediul unei idei abstracte, cum să înțeleagă și cum să prelucreze lumea exterioară?

Dar nu prea contează asta acum; încă nu a sosit timpul marilor revelații ale abstractizării. Vremurile acelea aparțin pragmatismului. Toporul va fi utilizat pentru a doborî copacii, pentru a tăia carnea, pentru a găuri pieile sau pentru a săpa pământul.

Și totuși nu vom merge chiar atât de departe. Să lăsăm să doarmă acele timpuri străvechi și aceste interpretări poate prea îndrăznețe, pentru a reveni la ceea ce va fi adevăratul punct de plecare al aventurii noastre: regiunea mesopotamiană a celui de-al VIII-lea mileniu înaintea erei noastre.

De-a lungul Cornului Abundenței[1], revoluția neolitică a pornit din zona care acoperă aproape întreg teritoriul ce se va numi mai târziu Irak. De la un timp, oamenii au început să-și construiască aici așezări. Pe platourile din nord, sedentarizarea era deja un succes. Întreaga regiune devine laboratorul noilor invenții. Locuințele din chirpici formează primele sate și constructorii cei mai îndrăzneți își fac deja case cu un etaj. Agricultura devine tehnologie de vârf. Climatul generos permite cultivarea pământului fără a fi nevoie de sisteme artificiale de irigații. Treptat, se cultivă plante și sunt domesticite animale. Asistăm la momentul în care apare olăritul.

Ia te uită, vorbim deja despre olărit! Chiar dacă multe mărturii au dispărut în legătură cu aceste epoci pierdute

[1] Regiune fertilă din Orientul Apropiat, creată de albiile râurilor Eufrat și Tigru, delimitată de Deșertul Sirian la sud și de ținutul muntos din Anatolia la nord.

iremediabil în hățișurile timpului, arheologii încă fac mii de descoperiri: vase, vaze, urcioare, platouri, boluri... În jurul meu vitrinele sunt pline cu aceste obiecte. Primele datează de acum 9000 de ani și, trecând dintr-o sală în alta, suntem conduși de-a lungul secolelor, precum pietrele din *Petit Poucet*[1]. Sunt obiecte de toate mărimile și de toate formele, divers decorate, sculptate, pictate sau gravate. Unele au picioare, altele au anse. Există exponate intacte, unele crăpate, altele sparte, reconstituite. Sunt și unele din care nu au rămas decât câteva fragmente împrăștiate.

Ceramica este prima artă care folosește focul, cu mult înaintea bronzului, a fierului sau a sticlei. Plecând de la argilă, această pastă de pământ maleabilă, care se găsește din abundență în zonele umede, artizanii olari pot să prelucreze obiectele după bunul lor plac. Atunci când le convine forma căpătată de obiect, nu mai trebuie decât să-l lase la uscat câteva zile, apoi să-l ardă la foc puternic, pentru a se întări. Tehnica este cunoscută de mult timp. Încă de acum 20000 de ani se făceau statuete de mici dimensiuni. Odată cu sedentarizarea, oamenilor le-a venit ideea de a crea obiecte pentru traiul de zi cu zi. Noul mod de viață impune nevoia de depozitare și astfel se fabrică oale pentru treburile casnice.

Recipientele din pământ ars devin rapid obiecte indispensabile vieții de zi cu zi și necesare organizării colective a comunității. Mai mult, cu toate că vesela nu rezistă în timp, ea trebuie să fie frumoasă. În curând, ceramica

[1] *Tom Degețel*, povestire de tradiție orală, culeasă și făcută celebră de către Charles Perrault *(N.r.)*.

va fi pictată și astfel apar diverse școli. Unele imprimă motive în argila încă proaspătă, cu ajutorul unei cochilii sau a unei simple rămurele. Altele, mai întâi ard vasele și apoi le decorează cu ajutorul pietrelor șlefuite. Iar alte școli pictează obiectele cu pigmenți naturali.

Parcurgând sălile dedicate antichităților orientale, sunt izbit de bogăția motivelor geometrice imaginate de mesopotamieni. La fel ca în cazul topoarelor vechiului nostru cioplitor în piatră, anumite simetrii sunt mult prea ingenioase pentru a ne gândi că nu au fost premeditate. Îmi atrag în mod special atenția frizele care ornează marginile acestor vaze.

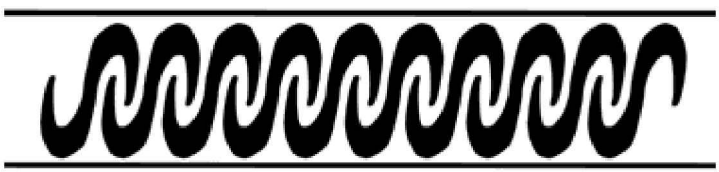
Frizele sunt acele benzi orizontale, prezentând un motiv identic care se repetă pe toată circumferința vasului. Printre cele mai întâlnite sunt cele care au formă triunghiulară și sunt dispuse precum dinții de fierăstrău. Se găsesc, de asemenea, frize cu două fire care se înfășoară unul în jurul celuilalt. Urmează frizele în spic, frizele în nișe pătrate, în romburi ascuțite, în triunghiuri hașurate, în cercuri intersectate...

Trecând de la o epocă la alta, apar diferite mode. Anumite motive sunt foarte populare. Acestea sunt reluate, transformate, îmbunătățite în multiple variante. Câteva secole mai târziu, iată-le abandonate și devenind *has been*, fiind înlocuite de altele, mai la modă.

Le privesc cum defilează, iar ochiul meu de matematician se trezește. Văd în aceste frize simetrii, rotații, translații. Atunci încep mental să le triez, să le aranjez. Câteva teoreme din anii de studiu îmi revin în memorie. Iată de

ce am nevoie: de clasificarea transformărilor geometrice. Îmi scot un carnet și un creion și încep să mâzgălesc.

Mai întâi există rotațiile. Am exact în fața ochilor o friză compusă din elemente imbricate, în formă de „S". Îmi răsucesc capul pentru a mă convinge. Da, este sigur, aceasta este invariabilă la o semirotație. Dacă aș lua urciorul și l-aș răsuci cu gura în jos, forma frizei ar rămâne exact aceeași.



Apoi există simetriile. Acestea sunt de mai multe tipuri. Puțin câte puțin, îmi completez lista și încep o vânătoare de comori. Pentru fiecare transformare geometrică sunt în căutarea frizei corespunzătoare. Trec dintr-o sală într-alta, revin pe urmele mele... Anumite obiecte sunt deteriorate și trebuie să mijesc ochii pentru a încerca să reconstitui motivul încrustat pe această argilă acum câteva mii de ani. Când găsesc un motiv nou, îl bifez. Privesc datele pentru a încerca să reconstitui cronologia apariției lor.

Oare cam câte ar trebui să găsesc în total? Gândindu-mă puțin, reușesc, în sfârșit, să ajung la această faimoasă teoremă. Găsesc în total șapte categorii valabile. Șapte grupe de transformări geomerice diferite care pot să lase motivele invariabile. Niciuna în plus, niciuna în minus.

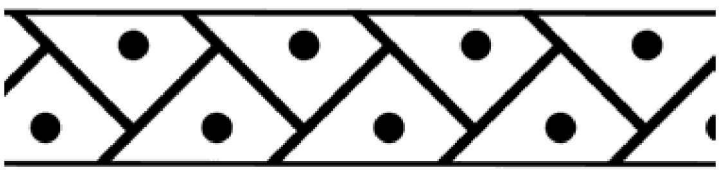
Bineînțeles că acest lucru nu era știut de mesopotamieni. E și normal: teoria despre care este vorba nu va fi formalizată decât începând cu Renașterea. Cu toate acestea, fără să se îndoiască de acțiunile lor și fără altă pretenție în afară de aceea de a-și decora vasele cu linii armonioase și originale, acești olari preistorici erau pe cale să realizeze primele raționamente ale unei discipline fantastice care va agita o întreagă comunitate de matematicieni câteva mii de ani mai târziu.

Mă uit peste notițele mele și constat că le-am inventariat aproape pe toate. Oare? Una dintre cele șapte frize încă îmi scapă. Mă așteptam la acest lucru, căci este în mod evident cea mai complicată din listă. Caut o friză care întoarsă pe orizontală ar arăta la fel, dar decalată cu jumătatea lungimii unui motiv. Astăzi o numim simetrie prin alunecare. O adevărată provocare pentru mesopotamienii noștri.

Totuși sunt încă departe de a fi parcurs toate sălile, așadar nu-mi pierd speranța. Căutarea continuă. Observ și cel mai mic detaliu, și cel mai mic indiciu. Cele șase categorii, cele pe care deja le-am observat, se acumulează. În carnetul meu apar date, scheme și alte mâzgăleli care se amestecă. În ciuda tuturor acestora, tot nu găsesc niciun semn al celei de-a șaptea frize misterioase.

Deodată, simt un val de adrenalină. În spatele unei vitrine, tocmai observ un obiect cu o înfățișare destul de jalnică, un simplu fragment. Totuși, de sus în jos, patru frize parțiale, dar vizibile se suprapun, iar una dintre ele îmi atrage brusc atenția. Cea de-a treia. Este compusă din fragmente asemenea unor dreptunghiuri înclinate

care se întretaie în formă de spic. Clipesc de emoție. Observ atent motivul și îl desenez repede în carnet ca și cum mi-ar fi frică să nu dispară de sub ochii mei. Este geometria pe care o caut. Este vorba despre simetria prin alunecare. Cea de-a șaptea friză a fost demascată.



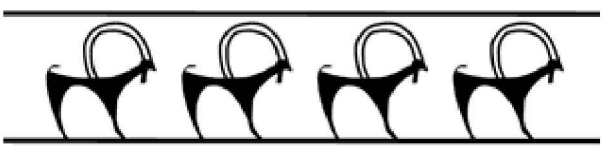
Alături de obiect, indicația spune: *Fragment de ceașcă cu decorațiune orizontală de benzi și romburi ascuțite – mijlocul celui de-al V-lea mileniu înainte de Hristos.*

O reașez mental în cronologia mea. Mijlocul mileniului V înainte de Hristos. Ne aflăm încă în preistorie. Cu mai mult de o mie de ani înainte de inventarea scrierii, iar olarii mesopotamieni listaseră deja, fără să știe, toate cazurile unei teoreme care nu va fi enunțată și demonstrată decât șase mii de ani mai târziu.

Câteva săli mai încolo întâlnesc un vas cu trei anse, care intră în clasament la cea de-a șaptea categorie. Chiar dacă motivul s-a transformat în spirală, structura geometrică rămâne aceeași. Puțin mai încolo, un altul. Aș vrea să merg mai departe, dar, deodată, decorul se schimbă și iată-mă ajuns la capătul colecțiilor orientale. Dacă aș continua să merg, aș ajunge în Grecia. Arunc o ultimă privire peste notițele mele. Frizele cu simetrie alunecată se numără pe degetele de la o mână. Mă trec căldurile.

Cum recunoaștem cele șapte categorii de frize?

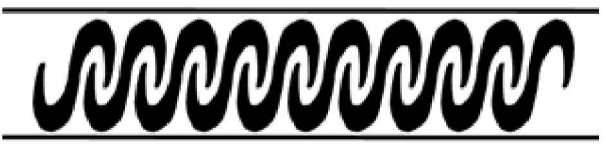
Prima categorie este cea a frizelor care nu au nicio proprietate geometrică particulară. Pur și simplu, un motiv care se repetă fără nicio simetrie sau centru de rotație. Este mai ales cazul frizelor care nu se bazează pe figuri geometrice, ci pe desene figurative, precum cele de animale.



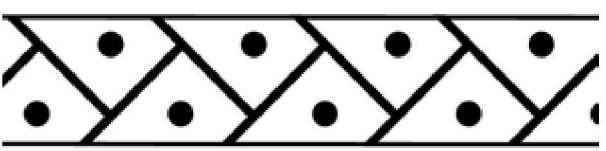
A doua categorie le cuprinde pe cele pentru care linia orizontală ce taie friza în două părți devine o axă de simetrie.

A treia categorie grupează frizele care au o axă de simetrie verticală, caz în care friza constă într-un motiv care se repetă pe orizontală, iar axele de simetrie pe verticală se repetă și ele.

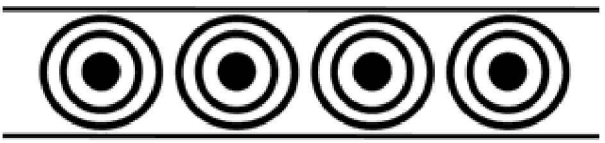
A patra categorie este cea a frizelor invariabile printr-o rotație la 180 de grade. Fie că priviți aceste frize normal, fie cu capul în jos, veți vedea mereu același lucru.



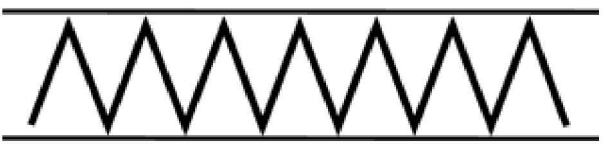
A cincea categorie este cea a simetriilor prin alunecare. Este vorba despre faimoasa categorie pe care tocmai am descoperit-o în zona Mesopotamiei. Dacă răsuciți una dintre aceste frize pe o axă de simetrie orizontală (aceeași ca în cazul celei de-a doua categorii), atunci friza obținută se aseamănă, dar o găsim decalată cu lungimea unei jumătăți de motiv.



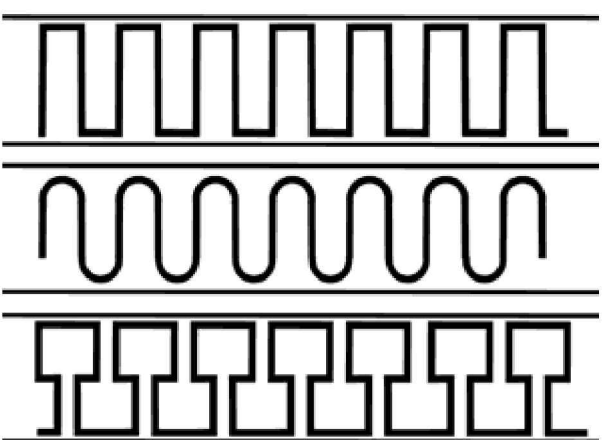
Celor de-a șasea și de-a șaptea categorii nu le corespund noi transformări geometrice, ci regăsim aici combinate mai multe proprietăți întâlnite în categoriile anterioare. Astfel, frizele celei de-a șasea categorii sunt cele care au totodată o simetrie orizontală, una verticală și un centru de rotație cu 180 de grade.



În ceea ce privește a șaptea categorie, aceasta conține frize care au simetrie verticală, un centru de rotație și o simetrie prin alunecare.



Ceea ce trebuie să reținem este că aceste categorii nu privesc decât structura geometrică a frizelor și nu ne împiedică să realizăm câteva variații în forma motivelor. Astfel, următoarele frize, cu toate că sunt diferite, aparțin în totalitate celei de-a șaptea categorii.



> Așadar, toate frizele pe care le putem imagina aparțin uneia dintre cele șapte categorii. Orice altă combinație este geometric imposibilă. Curios este faptul că ultimele două categorii sunt cel mai frecvent întâlnite. În mod spontan, este mai ușor să desenezi figuri având multe simetrii, decât figuri care au puține simetrii.

Încântat de succesul meu mesopotamian, iată-mă a doua zi gata să încep asaltul Greciei Antice. Nici nu am sosit bine și nu mai știu încotro să întorc capul. Aici vânătoarea frizelor este un joc de copii. Mi-a fost de ajuns să fac câțiva pași și să dau peste câteva vitrine cu amfore negre cu figuri roșii pictate, pentru a-mi regăsi lista celor șapte frize.

În fața unei asemenea abundențe de motive, renunț destul de repede să mai țin socoteala, așa cum am făcut-o cu Mesopotamia. Creativitatea acestor artiști mă uimește. Noi motive își fac apariția, mereu mai complexe și mai ingenioase. De mai multe ori trebuie să mă opresc și să mă concentrez pentru a dezlega mental ițele care se înlănțuie și se amestecă în jurul meu.

În colțul unei săli, un lutrofor cu figuri roșii mă lasă fără glas.

Un lutrofor este un vas alungit, cu două toarte, cu care se transportă apa pentru baie. Cel de aici are aproape un metru înălțime. Frizele sunt prezente și încep să le așez pe categorii. Una. Două. Trei. Patru. Cinci. În câteva secunde identific cinci dintre cele șapte structuri geometrice. Vasul este prins de perete și, aplecându-mă puțin, constat că o a șasea categorie se găsește pe partea ascunsă

a obiectului. Îmi mai lipsește una singură. Ar fi prea frumos să o găsesc și pe aceasta! Uimitor, cea care lipsește nu este cea de data trecută. Timpurile s-au schimbat, la fel și moda, și nu mai este simetria prin alunecare singura care lipsește, ci combinația dintre simetria verticală, simetria prin rotație și simetria prin alunecare.

O caut frenetic, mă uit atent la fiecare colțișor al obiectului. Nu o găsesc. Puțin dezamăgit, mă pregătesc să renunț, dar privirea îmi este atrasă de un detaliu. În centrul vasului este reprezentată o scenă cu două personaje. La o primă privire nu pare să existe o friză în acest loc. Cu toate acestea, în josul imaginii și în dreapta scenei, un obiect îmi atrage atenția: un vas pe care se sprijină personajul central. Un vas desenat pe un vas! Această *mise en abyme*[1] mă face să zâmbesc. Mijesc ochii, imaginea este puțin deteriorată, dar este neîndoielnic că acest vas desenat are el însuși o friză și... minune! — este vorba despre cea care îmi lipsește!

În ciuda eforturilor mele repetate, nu am mai găsit niciun alt obiect cu aceeași particularitate. Acest lutrofor pare a fi singurul de felul său în colecția Luvrului. Este singurul care are cele șapte categorii de frize.

O altă surpriză mă așteaptă ceva mai încolo. Frize în 3D! Și eu care credeam că perspectiva e o invenție a Renașterii! Zone întunecate și clare, dispuse cu măiestrie de artist, creează un joc de umbre și lumină dând un efect de volum formelor geometrice care se desfășoară pe circumferința acestui recipient imens.

---

1 Punere în abis, tehnică prin care se plasează o imagine în ea însăși, apărută în heraldica medievală și generalizată ulterior de către André Gide, începând cu 1893. *(N.r.)*

Cu cât înaintez mai mult, cu atât îmi vin în minte noi întrebări. Anumite obiecte nu sunt acoperite cu frize, ci cu pavaje. Cu alte cuvinte, motivele geometrice nu mai sunt suficiente pentru a umple banda fină care înconjoară obiectul, ci pun stăpânire pe toată suprafața acestuia, înmulțind astfel posibilitățile combinațiilor geometrice.

După greci, vin egiptenii, etruscii și romanii. Descopăr iluzii de dantele cioplite direct în piatră. Liniile tăiate se întrepătrund, trec pe rând pe deasupra și pe dedesubtul lor într-o înlănțuire perfect ordonată. Apoi, ca și cum operele nu sunt suficiente, mă surprind observând Luvrul însuși. Privesc la plafoane, la pavaje, la cadrele ușilor. Pe drum spre casă am impresia că nu mă mai pot opri. Pe stradă observ balcoanele clădirilor, motivele de pe îmbrăcămintea trecătorilor, zidurile culoarelor de la metrou...

Este suficient să schimbi modul în care privești lumea pentru a vedea cum apare imediat matematica. Căutarea ei este fascinantă și fără de sfârșit.

Și aventura de-abia acum începe.

2

Și a apărut numărul

În acele timpuri, în Mesopotamia, lucrurile mergeau cum nu se poate mai bine. La sfârșitul celui de-al patrulea mileniu înaintea erei noastre, micile sate pe care le-am lăsat în urmă s-au metamorfozat în orașe înfloritoare. Unele au deja mai multe zeci de mii de locuitori. Tehnologiile se dezvoltă așa cum nu s-a mai văzut înainte. Fie că este vorba despre arhitecți, bijutieri, olari, țesători, tâmplari sau sculptori, artizanii trebuie să facă dovada unei ingeniozități crescânde pentru a pune în valoare provocările tehnice cu care se confruntă. Cu toate acestea, metalurgia nu este încă pusă la punct, dar se lucrează în acest sens.

Încet-încet se dezvoltă o rețea de drumuri în toată regiunea. Schimburile culturale și comerciale se multiplică. Se creează ierarhii din ce în ce mai complexe și *Homo sapiens* descoperă bucuriile oferite de administrație. Toate aceste lucruri cer o organizare exemplară! Pentru a pune puțină ordine în această lume complexă a sosit marele moment al inventării scrierii, iar cu această ocazie specia noastră a intrat în istorie. În revoluția care se pregătește, matematica joacă un rol de avangardă.

Urmând cursul Eufratului, părăsim platourile nordice care au văzut nașterea primelor sate sedentarizate și luăm direcția regiunii Sumerului, care acoperă câmpiile

Mesopotamiei de Jos. Aici, în stepele sudice, este locul în care se adună de acum înainte principalele concentrări de populație. De-a lungul fluviului întâlnim orașe precum Kish, Nippur și Shuruppak. Aceste orașe sunt încă tinere, dar secolele care se deschid în fața lor anunță mari perioade de grandoare și prosperitate.

Iată-ne deodată în fața Urukului, care se întrezărește la orizont.

Orașul Uruk este un furnicar uman care influențează întregul Orient Apropiat cu puterea și cu prestigiul său. Construit în principal din cărămizi arse, orașul își etalează nuanțele arămii pe mai mult de o sută de hectare, iar călătorul rătăcit poate cutreiera ore întregi pe străduțele sale aglomerate. În inima orașului au fost clădite mai multe temple monumentale. Aici se celebrează An, tatăl tuturor zeilor, dar mai ales Inanna, zeița cerului. Pentru ea a fost construit templul Eanna, unde cea mai mare clădire măsoară optzeci de metri lungime și treizeci de metri lățime. Cum să nu rămână impresionați călătorii în fața acestei minuni?!

Vara se apropie și, ca în orice an în perioada aceasta, pe oraș pune stăpânire o agitație aparte. Turmele de oi vor pleca în curând spre zonele de pășunat din nord, pentru a se întoarce la sfârșitul sezonului cald. De-a lungul mai multor luni, ciobanii vor avea grijă să păstorească bine animalele, să le asigure hrana și protecția, pentru a le reda în bună stare proprietarilor. Templul Eannei deține el însuși mai multe turme, dintre care cele mai mari numără zeci de mii de capete. Convoaiele sunt atât

de impresionante, încât unele dintre ele sunt însoțite de soldați pentru a le proteja de pericolele care apar în timpul transhumanței.

Totuși, nici nu se pune problema pentru proprietari să lase oile să plece fără să-și fi luat câteva măsuri de precauție. Contractul cu ciobanii este clar: trebuie să revină cu tot atâtea capete cu câte au plecat. Nu se pune problema de a lăsa să se piardă o parte din turmă sau de a da dispărute unele exemplare.

În cazul acesta apare o problemă: cum comparăm mărimea unei turme care a plecat cu cea care a revenit?

Pentru a răspunde la această întrebare, deja de câteva secole, a fost realizat un sistem de jetoane de argilă. Există mai multe tipuri de jetoane, fiecare corespunzând unuia sau mai multor obiecte sau animale după forma și motivele care sunt inscripționate pe ele. Pentru o oaie se desenează un simplu disc marcat cu o cruce. În momentul plecării se pune într-un recipient o cantitate de jetoane corespunzătoare mărimii turmei. La revenire va fi suficient să se compare turma cu conținutul recipientului pentru a verifica faptul că niciun animal nu lipsește de la apel. Mult mai târziu aceste jetoane vor căpăta numele latin de *calculi,* adică „pietricele", care vor da naștere cuvântului *calcul.*

Această metodă este practică, dar are un inconvenient. Cine păstrează jetoanele? Căci neîncrederea funcționează în ambele direcții. Ciobanii se pot teme la rândul lor că proprietarii mai puțin cinstiți vor adăuga câteva jetoane în urnă în timpul absenței lor. Proprietarii ar

putea astfel să profite și să ceară despăgubiri pentru oi care nu au existat niciodată.

Așa că oamenii își bat capul și în cele din urmă se ajunge la o soluție. Jetoanele vor fi păstrate într-o minge de argilă ermetic închisă. În momentul închiderii, fiecare își pune semnătura pe suprafața bilei protectoare pentru a-i certifica autenticitatea. De acum încolo este imposibil să fie modificat numărul de jetoane fără a sparge bila. Ciobanii pot să plece liniștiți.

Dar iată că din nou vine rândul proprietarilor să găsească inconveniente la această metodă. Pentru nevoile propriilor afaceri este necesar să cunoască în orice moment numărul animalelor deținute. Cum se procedează în cazul acesta? Să țină minte pe dinafară numărul oilor? Nu e la îndemână, când știm că limba sumeriană nu are încă termeni pentru a desemna numere atât de mari. Să existe o dublă măsură de jetoane, nesigilate, care să însumeze conținuturile tuturor bilelor închise? N-ar fi practic.

În sfârșit, o soluție s-a găsit. Cu ajutorul unei tije de trestie ascuțite la capăt, se inscripționează pe suprafața fiecărei bile desenul jetoanelor care se găsesc în interior. În felul acesta, devine posibilă consultarea în orice moment a conținutul bilei, fără ca ea să fie spartă.

Această metodă pare să convină tuturor de acum încolo. Este folosită pe scară largă, nu doar pentru a număra oi, ci și pentru a sigila tot felul de acorduri sau contracte. Cerealele – precum orzul sau grâul –, lâna și textilele, metalul, bijuteriile, pietrele prețioase, uleiul sau vasele au propriile jetoane. Chiar și impozitele sunt controlate cu

ajutorul jetoanelor. Pe scurt, la sfârșitul celui de-al IV-lea mileniu, în Uruk orice contract valabil trebuia să fie sigilat într-o bilă închisă care conținea jetoane de argilă.

Tot acest sistem funcționează de minune și, într-o zi, încă o idee strălucită ia naștere. Este vorba de acea idee despre care ne întrebăm cum de nu am avut-o înainte, cea care este totodată genială și simplă. Deoarece numărul animalelor este înscris pe suprafața bilei, la ce bun să continuăm să punem jetoane în interior? Și la ce ne servește să continuăm să facem bile? Am putea pur și simplu să inscripționăm imaginea jetoanelor pe orice bucată de argilă. Adică pe o tabletă aplatizată, de exemplu.

Iar acest lucru s-ar numi scriere.

Iată-mă revenit la Luvru. Colecțiile secțiunii de antichități orientale stau mărturie pentru această poveste. Primul lucru care mă uimește în legătură cu aceste bile este mărimea lor. Sferele mici de argilă, pe care sumerienii le modelau simplist răsucindu-le în jurul degetului mare, nu sunt deloc mai mari decât o minge de ping-pong. Iar jetoanele nu depășesc un centimetru.

Puțin mai încolo, iată că apar primele tablete; acestea se multiplică și umplu repede vitrine întregi. Ușor-ușor scrierea se cizelează și capătă înfățișarea cuneiformă compusă din mici crestături în formă de cui. După dispariția primelor civilizații ale Mesopotamiei, la începutul erei noastre, cea mai mare parte a acestor obiecte va dormi sub ruinele orașelor pustiite, înainte de a fi scoase la lumină de arheologii europeni, începând cu secolul al XVII-lea. Ele vor fi progresiv descifrate de-a lungul secolului al XIX-lea.

Nici aceste tablete nu sunt prea mari. Unele dintre ele au mărimea unei cărți de vizită, dar sunt acoperite cu sute de semne minuscule care se îngrămădesc unele în altele. Nu se pune problema pentru scribii mesopotamieni să lase vreo părticică de argilă nescrisă. Indicațiile muzeului, care se găsesc lângă aceste obiecte, îmi permit să interpretez simbolurile misterioase. Este vorba despre animale, bijuterii sau cereale.

Lângă mine, câțiva turiști fac fotografii cu... tabletele. Amuzantă farsă în care caruselul istoriei va purta scrierea pe atât de multe suporturi diferite, de la argilă la hârtie, trecând prin marmură, ceară, papirus sau pergament, și care într-o ultimă apariție va da tabletelor electronice forma strămoșilor lor de argilă. Punerea față în față a celor două obiecte are ceva cu adevărat impresionant. Cine știe dacă peste cinci mii de ani aceste două tablete nu se vor regăsi unele lângă altele de aceeași parte a vitrinei?!

Timpul a trecut și iată-ne acum la începutul celui de-al III-lea mileniu înaintea erei noastre. O etapă suplimentară a fost depășită: numărul s-a eliberat de obiectul pe care îl numără! Înainte, cu bilele de argilă și primele tablete, simbolurile pentru numărare depindeau de obiectele luate în considerare. O oaie nu este o vacă. Deci simbolul pentru a număra o oaie nu este același cu cel pentru a număra o vacă. Și fiecare obiect care putea fi numărat avea propriile sale simboluri ca și cum ar fi avut propriile jetoane.

Dar toate acestea au luat sfârșit acum. Numerele au căpătat propriile simboluri. Mai clar, pentru a număra

opt oi nu se mai utilizează opt simboluri care desemnează o oaie, ci se scrie direct cifra opt urmată de simbolul pentru oaie. Iar pentru a număra opt vaci este suficient să se înlocuiască simbolul pentru oaie cu acela pentru vacă. În ceea ce privește numărul, el rămâne același.

Această etapă a istoriei gândirii este cu adevărat fundamentală. Dacă ar trebui să alegem o dată pentru actul de naștere a matematicii, atunci eu aș alege fără îndoială acest moment. Adică momentul în care numărul ajunge să existe prin și pentru el însuși, în care el se separă de realitate pentru a o observa de sus. Tot ceea ce a fost înainte nu a fost decât o perioadă de gestație. Pietrele cioplite, frizele, jetoanele nu sunt decât preludii pentru această naștere programată a numărului.

Numărul trece de acum încolo de partea abstractului, iar acest lucru constituie adevărata identitate a matematicii; ea devine știința abstractului prin excelență. Obiectele pe care le studiază nu au existență fizică. Acestea nu sunt materiale, nu sunt alcătuite din atomi. Sunt doar idei. Totuși, aceste idei sunt de o eficiență formidabilă în momentul în care dorim să pricepem lumea!

Fără îndoială că nu este o întâmplare că necesitatea de a scrie numerele a fost atât de importantă în apariția scrierii. Căci, dacă alte idei puteau fi transmise oral fără probleme, ar fi fost dificil să se stabilească un sistem numeric fără a trece printr-o notație scrisă.

Chiar și astăzi, ideea pe care ne-o facem despre numere este oare deosebită de modul în care le scriem? Dacă vă cer să vă gândiți la o oaie, cum o vedeți? Vă

reprezentați, fără îndoială, un animal cu patru picioare, lânos, care behăie. Nu v-ar veni în minte să vizualizați cele patru litere ale cuvântului „oaie." Totuși, dacă vă vorbesc acum despre numărul o sută douăzeci și opt, ce anume vedeți? Percepeți pe 1, pe 2 și pe 8, care capătă formă în creier și se înlănțuie ca și cum ar fi scris cu cerneala impalpabilă a gândurilor dumneavoastră? Reprezentarea mentală pe care ne-o facem despre numerele mari pare a fi indispensabil legată de forma lor scrisă.

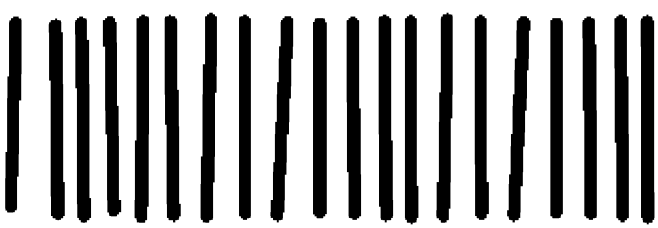
Exemplul este fără precedent. În timp ce pentru toate celelalte lucruri scrierea nu este decât un mijloc de a retranscrie ceea ce exista înainte în limbajul oral, iată că în cazul numerelor scrierea este cea care va dicta limbii. Gândiți-vă că atunci când pronunțați „o sută douăzeci și opt" nu faceți altceva decât să citiți 128, adică: 100 + 20 + 8. Dincolo de un anumit prag, este imposibil să vorbești despre numere fără a recurge la suportul scrierii. Înainte de a fi scrise, numerele mari nu aveau cuvinte care să le denumească.

În epoca noastră, sunt încă populații care nu dețin decât un număr foarte limitat de cuvinte pentru a desemna numerele. Astfel, membrii tribului Pirahã, vânători și culegători care trăiesc pe malurile râului Maici în Amazonia, numără doar până la doi. Dincolo de această cifră folosesc un singur cuvânt care semnifică „mai mulți" sau „mult". Tot în Amazonia, cei din tribul Munduruku au cuvinte pentru a desemna cifrele până la cinci, adică degetele de la o mână.

În societățile noastre moderne numerele au pus stăpânire pe viața de zi cu zi. Au devenit atât de

omniprezente și indispensabile, încât uităm adesea cât de genială este ideea care stă în spatele lor și cât de multe secole le-au trebuit strămoșilor noștri pentru a le făuri.

De-a lungul timpului au fost inventate numeroase procedee pentru a scrie numerele. Cel mai simplu dintre acestea constă în a trasa tot atâtea semne câte indică numărul dorit. De exemplu, când trasăm liniuțe unele lângă altele. Aceasta este metoda pe care încă o folosim frecvent, de pildă pentru a număra punctele din cadrul unui joc.



Probabil cel mai vechi semn cunoscut al utilizării acestui procedeu datează cu mult înaintea inventării scrierii de către sumerieni. Oasele Ishango au fost găsite în anii 1950 pe malul lacului Edouard din actuala Republică Democrată Congo și au fost datate ca fiind de acum douăzeci de mii de ani. Lungi de 10 și 14 cm, acestea au particularitatea de a fi fost crestate cu o multitudine de semne mai mult sau mai puțin egal despărțite între ele. Care era rolul acestor crestături? Era vorba probabil despre un prim sistem de numărare. Unii văd în acele oase un calendar, în timp ce alții extrapolează cunoștințe aritmetice deja foarte

avansate. Este greu să știm cu exactitate dacă așa stăteau lucrurile. Cele două oase sunt în prezent vizibile la Muzeul de Științe Naturale din Belgia, la Bruxelles.

Această metodă de numărare care utilizează un semn pentru fiecare unitate adăugată își atinge rapid limitele de îndată ce se impune să procesăm numere relativ mari. Pentru a avansa rapid, este mai indicat să se facă pachete.

Jetoanele mesopotamienilor puteau reprezenta mai multe unități. Exista, de exemplu, un jeton special pentru a reprezenta zece oi. În momentul trecerii la scriere, acest principiu s-a păstrat. Se găsesc astfel simboluri pentru a desemna pachete de 10, 60, 600, 3 600 și 36 000.

Observăm deja căutarea unei logici în construirea simbolurilor. Astfel, 60 sau 3 600 sunt multiplicate cu 10 atunci când le adăugăm un cerc în interior. Odată cu apariția scrierii cuneiforme, aceste prime simboluri se transformă puțin câte puțin.

Datorită vecinătății cu Mesopotamia, Egiptul nu întârzie să adopte scrierea și dezvoltă, începând cu mileniul al III-lea, propriile simboluri pentru numerotare.

1 10 100 1 000 10 000 100 000 1 000 000

De acum încolo, sistemul a devenit pur zecimal: fiecare simbol are o valoare de zece ori mai mare decât precedentul.

Aceste sisteme prin adiționare, în care este suficient să adaugi valorile simbolurilor scrise, vor cunoaște un imens succes în lume și o multitudine de variante vor vedea lumina zilei de-a lungul întregii Antichități și a unei bune părți din Evul Mediu. Vor fi utilizate cu precădere de către greci și romani care se vor concentra pe folosirea literelor din alfabetele lor ca simboluri numerice.

În fața sistemelor prin adiționare, un nou mod de scriere a numerelor va apărea încetul cu încetul: numărarea prin poziționare. În aceste sisteme, valoarea unui simbol depinde de locul pe care îl ocupă în cadrul numărului. Și, încă o dată, mesopotamienii sunt primii inventatori ai acestui sistem.

În al II-lea mileniu înaintea erei noastre vine rândul Babilonului să pună stăpânire pe Orientul Apropiat. Scrierea cuneiformă este încă la modă, dar nu se utilizează

acum decât două simboluri: cuiul simplu, care valorează 1, și unghiul, care valorează 10.

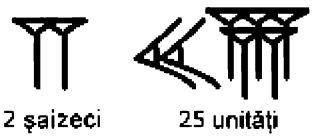
1 10

Aceste două semne permit să fie scrise prin adiționare toate numerele până la 59. De pildă, numărul 32 se scrie cu 3 unghiuri, urmate de două cuie.

32

Apoi, de la 60 încolo începem să realizăm grupuri. Și sunt aceleași simboluri care vor servi la scrierea grupurilor de 60. Astfel, precum în scrierea noastră actuală, cifrele citite de la dreapta la stânga desemnează unitățile, pe urmă zecile, apoi sutele. În această numerotare babiloniană citim mai întâi unitățile, apoi șaizecile, apoi trei mii șase sute (adică 60 x 60) și așa mai departe, fiecare poziție valorând 60 înmulțit cu precedenta.

De exemplu, numărul 145 este compus din două șaizeci, care fac o sută douăzeci, la care trebuie adăugate douăzeci și cinci de unități. Așadar, babilonienii ar fi scris acest număr în felul următor:



145

Datorită acestui sistem, savanții babilonieni vor căpăta cunoștințe ieșite din comun. Desigur că știu să pună în practică cele patru operații de bază: adunarea, scăderea, înmulțirea și împărțirea, dar totodată și rădăcinile pătrate, ridicarea la putere sau inversările. Creează tabele aritmetice extrem de detaliate și propun ecuații pentru care dezvoltă metode de rezolvare extrem de precise.

Totuși toate aceste cunoștințe vor fi în curând uitate. Civilizația babiloniană se află în declin și o mare parte dintre descoperirile sale matematice vor trece în uitare. Gata cu numerotarea prin poziționare! Gata cu ecuațiile! Va trebui să așteptăm secole întregi pentru ca aceste probleme să fie repuse pe tapet și abia în secolul al XIX-lea se reușește descifrarea tăbliței cuneiforme, care ne vor aduce aminte că mesopotamienii au răspuns la ele înaintea tuturor.

După babilonieni, mayașii sunt cei care vor imagina un sistem pozițional, dar folosind baza 20. Apoi vine rândul indienilor să inventeze un sistem în baza 10. Acest ultim sistem va fi reutilizat de savanții arabi înainte de a ajunge în Europa la sfârșitul Evului Mediu. Aceste simboluri vor căpăta numele de cifre arabe și vor cuceri curând întregul mapamond.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Odată cu apariția numerelor, umanitatea înțelege treptat că tocmai a inventat un instrument care depășește toate așteptările pentru a descrie, a analiza și a înțelege lumea care o înconjoară.

Suntem atât de încântați de acest lucru încât uneori exagerăm. Apariția numerelor coincide cu apariția diferitelor practici de numerologie. Numerelor li se atribuie proprietăți magice, le interpretăm depășind sensul pe care îl au, căutăm să citim în ele mesaje ale zeilor și ale destinului lumii.

În secolul al VI-lea înaintea erei noastre, Pitagora va face din număr conceptul fundamental al filosofiei sale. „Totul este număr", spune gânditorul grec. După el, numerele sunt cele care produc figuri geometrice care la rândul lor generează cele patru elemente ale materiei: focul, apa, pământul și aerul, ce intră în componența tuturor ființelor. Pitagora creează astfel un întreg sistem de gândire cu ajutorul numerelor. Imparul este asociat masculinului, în timp ce parul este asociat femininului. Numărul 10 reprezentat sub forma unui triunghi este denumit *tetractis* și devine simbolul armoniei și perfecțiunii Cosmosului. Pitagoreicii se află la originea aritmanției, care pretinde că poate citi caracterele umane asociind valori numerice literelor care compun numele acestora.

În paralel cu toate acestea, discuțiile se poartă asupra a ceea ce este numărul. Unii autori susțin că unitatea nu este un număr, căci numărul desemnează multiplul,

deci nu poate fi considerat astfel decât dincolo de doi. Se va merge până într-acolo încât să se spună că, pentru a putea genera toate celelalte numere, 1 trebuie să fie atât par, cât și impar.

Mai târziu, ceea ce a animat discuțiile și mai mult a fost subiectul lui zero, al numerelor negative sau al numerelor imaginare. De fiecare dată, apariția acestor noi idei în cercul numerelor va genera dezbateri și-i va obliga pe matematicieni să-și lărgească orizonturile.

Pe scurt, numărul nu a încetat să fie o problemă și le va fi necesar mult timp oamenilor să învețe să stăpânească aceste creaturi stranii ieșite direct din creierele lor.

3

Nimeni nu intră aici dacă nu este geometru

Odată numărul inventat, matematica nu va întârzia să se diversifice. Mai multe ramuri, precum aritmetica, logica sau algebra, vor germina puțin câte puțin în sânul său, dezvoltându-se până la a atinge maturitatea și afirmându-se ca discipline de sine stătătoare.

Una dintre acestea va extrage repede lozul câștigător și-i va captiva pe cei mai mulți savanți ai Antichității; este vorba despre geometrie. Ea este cea care va asigura renumele primelor VIP-uri ale matematicii, precum Thales, Pitagora sau Arhimede, ale căror nume bântuie astăzi paginile manualelor școlare.

Totuși, înainte de a deveni domeniul marilor gânditori, geometria își va câștiga titlurile de glorie pe teren. Etimologia sa atestă acest lucru, căci ea este înainte de toate știința măsurării pământului, iar primii care îl vor măsura vor fi matematicienii de proximitate. Problemele împărțirii teritoriului fac parte dintre clasicele genului. Cum să divizăm un câmp în părți egale? Cum să evaluăm prețul unui teren în funcție de suprafața sa? Care dintre aceste două parcele este mai apropiată de râu? Ce traiectorie trebuie să urmeze viitorul canal pentru a fi cel mai scurt pentru construire?

Toate aceste întrebări sunt de o importanță majoră în societățile antice în care întreaga economie se articulează încă în mod fundamental în jurul agriculturii și deci al repartizării terenurilor. Pentru a răspunde la aceste întrebări e nevoie de constituirea unei cunoașteri de tip geometric care se îmbogățește și se transmite din generație în generație. A dispune de această cunoaștere înseamnă în mod indiscutabil a-i asigura un loc central și de neînlocuit în cadrul societății.

Pentru acești profesioniști ai măsurătorii, sfoara este adesea primul instrument al geometriei. În Egipt, întinzător de sfoară este o meserie în sine. Ori de câte ori creșterea apelor Nilului provoacă inundații, se face apel la aceștia pentru a retrasa limitele parcelelor din vecinătatea fluviului. Datorită informațiilor cunoscute pe teren, iată-i fixându-și parii, desfășurându-și sforile lungi de-a lungul câmpurilor și efectuând apoi calcule care permit regăsirea granițelor șterse de ape.

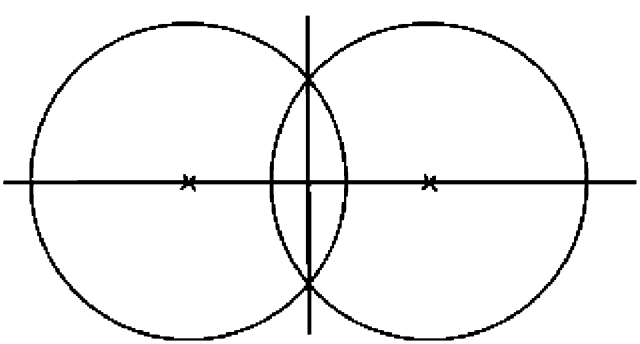
Atunci când se ridică o clădire, tot ei sunt cei care intervin primii ca să facă măsurătorile la sol și să marcheze cu precizie amplasarea construcției plecând de la planurile arhitectului. Iar când este vorba de construirea unui templu sau a unui monument foarte important, adesea faraonul însuși este cel care vine să întindă prima coardă în mod simbolic.

Trebuie să spunem că sfoara este instrumentul geometric „toate-ntr-unul". Cei care măsoară se servesc de ea ca de riglă, compas sau echer.

În ceea ce privește rigla, lucrurile sunt simple: întindeți sfoara între două puncte fixe și veți obține o linie

dreaptă. Iar dacă doriți să aveți o riglă gradată, puteți să faceți noduri pe sfoară la intervale regulate. Nici în privința compasului nu e vorba de vreo vrăjitorie. Fixați una dintre cele două extremități în jurul unui par și învârtiți celălalt capăt. Iată cercul! Iar dacă sfoara este gradată, veți ști cu precizie și lungimea razei.

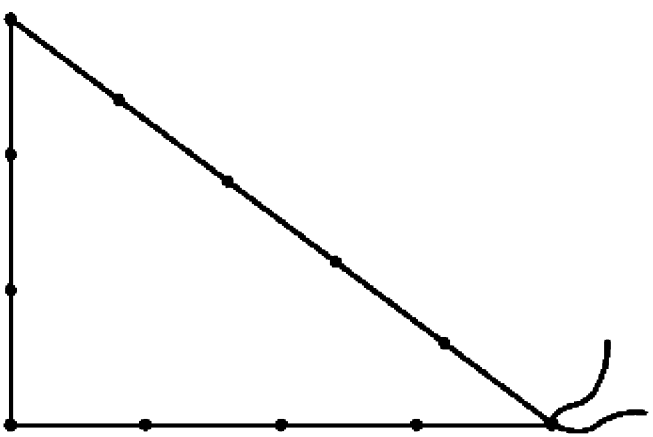
Dar în ceea ce privește echerul, lucrurile se complică puțin. Să ne oprim câteva momente asupra acestei probleme particulare. Cum veți proceda pentru trasarea unui unghi drept? Dacă ne gândim puțin, pot fi imaginate mai multe metode diferite. Dacă, de exemplu, trasați două cercuri care se intersectează, atunci linia dreaptă care leagă cele două centre va fi perpendiculară pe linia dreaptă care trece prin cele două puncte de intersecție. Iată, așadar, unghiul drept.



Această construcție este valabilă doar dacă o privim din punct de vedere teoretic, căci în practică lucrurile sunt mai complicate. Imaginați-vă cum cei care măsoară câmpul ar trebui ca ori de câte ori au nevoie de un unghi

drept să traseze două cercuri mari sau să controleze dacă un unghi deja construit este drept sau nu. Nu este nici rapid și nici eficient.

Măsurătorii au adoptat o altă metodă, mai subtilă și mai practică; ei realizează direct cu sfoara un triunghi care are un unghi drept. Un astfel de triunghi se numește triunghi dreptunghic. Celebru este cel care are dimensiunile 3–4–5. Dacă luați o sfoară împărțită în douăsprezece segmente prin treisprezece noduri, veți putea să creați un triunghi ale cărui laturi vor măsura trei, patru, respectiv cinci segmente. Și, ca prin minune, unghiul format de laturile cu trei și cu patru segmente va fi unul drept.



Acum patru mii de ani, babilonienii aveau tabele cu numere care permiteau construirea triunghiurilor

dreptunghice. Tăblița Plimpton 322, care se găsește acum în colecțiile Universității Columbia din New York și este datată cu 1 800 de ani înaintea erei noastre, prezintă un tabel de cincisprezece triplete de astfel de numere. În afară de 3–4–5 regăsim alte paisprezece triunghiuri, printre care unele net mai complexe, precum 65–72–97 sau 1679–2400–2929. Având marje de eroare foarte mici (de dimensiunile unei cochilii) — care exprimă eroarea de calcul sau de recopiere —, triunghiurile tăbliței Plimpton sunt desăvârșite. Toate au un unghi drept.

Este greu să știm cu precizie începând cu ce epocă măsurătorii babilonieni au folosit cunoașterea triunghiurilor dreptunghice pe teren, deoarece utilizarea acestora a persistat mult timp după dispariția civilizației lor. În Evul Mediu, sfoara cu treisprezece noduri, numită și coarda druizilor, era unul dintre instrumentele esențiale ale constructorilor de catedrale.

De-a lungul istoriei matematicii, nu rareori constatăm că anumite noțiuni asemănătoare apar în mod independent chiar și la mii de kilometri unele de altele și în contexte culturale complet diferite. Una dintre cele mai renumite coincidențe la care asistăm cu uimire este cea în care aflăm că civilizația chineză a dezvoltat în cursul primului mileniu dinaintea erei noastre o întreagă cunoaștere practică de tip matematic care seamănă într-un mod straniu cu descoperirile civilizațiilor babiloniene, egiptene sau grecești din aceeași epocă.

Aceste cunoștințe au fost acumulate de-a lungul secolelor înainte de a fi compilate sub dinastia Han, în

urmă cu aproape două mii de ani, într-una dintre cele mai mari opere matematice ale lumii: *Nouă capitole asupra artei matematice.*

Primul dintre aceste *Nouă capitole* este dedicat în întregime studiului măsurătorii câmpurilor de diferite forme. Triunghiuri dreptunghice, triunghiuri oarecare, trapeze, discuri, secțiuni de discuri sau inele sunt astfel de figuri geometrice pentru care sunt expuse minuțios procedee de calcul ale suprafețelor. Mai departe în cadrul operei descoperim că al nouălea și ultimul capitol se apleacă asupra studiului triunghiurilor dreptunghice. Ia ghiciți despre care figură este vorba încă de la prima frază a acestui capitol... 3–4–5!

Așa apar marile idei. Ele depășesc diferențele culturale și pot să înflorească spontan acolo unde spiritul uman este gata să le culeagă.

Câteva probleme din epocă

Dilemele care apar în măsurarea câmpului, în arhitectură și în amenajarea teritoriului i-au determinat pe savanții Antichității să-și pună probleme de natură geometrică de o mare diversitate. Iată câteva exemple în acest sens:
Enunțul următor, care apare pe tăblița babiloniană BM 85200, arată că babilonienii nu se mulțumeau doar cu geometria plană, ci se ocupau și de geometria în spațiu.

Fie o pivniță. Pe cât de lungă, pe atât de adâncă. 1, pământul, am săpat. Pământul scos l-am îngrămădit,

1'10. Lungime și frunte, '50. Lungime, frunte, ce anume?[1]

Ați înțeles ceva? Stilul matematicienilor din Babilon era telegrafic. Detaliind puțin, acest enunț ar putea să sune astfel:

Adâncimea unei pivnițe este de douăsprezece ori mai mare[2] *decât lungimea sa. Dacă sap pivnița pentru ca aceasta să aibă o unitate în plus în adâncime, atunci volumul său va fi egal cu 7/6. Dacă adaug lungimea și lățimea, voi obține 5/6*[3]*. Care sunt dimensiunile pivniței?*

Această problemă este însoțită de metoda detaliată a rezolvării, care ne conduce la soluție; lungimea măsoară 1/2, lățimea 1/3 și adâncimea 6.
Să facem acum un mic ocol pe Nil. Este de la sine înțeles că la egipteni găsim probleme cu piramide. Următoarea problemă a fost extrasă dintr-un celebru papirus aparținând scribului Ahmes și datat din prima jumătate a secolului al XVI-lea înaintea erei noastre.

---

1 Traducere Jens Høyrup, *L'algèbre au temps de Babylone,* Éditions Vuibert / Adapt-SNES, 2010. *(N.a.)*

2 Enunțul tăbliței pare să spună că lungimea și adâncimea sunt egale, dar în sistemul babilonian adâncimile sunt măsurate printr-o unitate de douăsprezece ori mai mare decât lungimile. *(N.a.)*

3 Trebuie să reținem totodată că în sistemul în baza 60, notația 1'10 desemnează numărul egal cu „în plus zece șaizecimi", pe care noi îl notăm în sistemul actual prin fracția 7/6. În ceea ce privește notația '50 ea semnifică fracția 5/6 (sau cincizeci de șaizecimi). *(N.a.)*

Care este înălțimea unei piramide a cărei latură de la bază este de 140 de coți și a cărei pantă[1] *este de 5 palme și 1 deget?*

Cotul, palma și degetul erau unitățile de măsură care aveau valoarea de 52,5 cm, 7,5 cm și 1,88 cm. Ahmes oferă și soluția: 93 de coți și 1/3. În același papirus, scribul se apleacă și asupra geometriei cercului:

Exemplu de calcul al unui câmp rotund având diametrul de 9 khet. Care este aria acestuia?

Khet-ul este tot o unitate de măsură, care are valoarea de 52,5 metri. Pentru a rezolva această problemă, Ahmes spune că aria acestui câmp circular este egală cu cea a unui câmp pătrat care are latura de 8 *khet*. Comparația este foarte utilă, căci este cu mult mai simplu să calculezi aria unui pătrat decât pe aceea a unui disc. El găsește 8 x 8 = 64. Totuși matematicienii care vin după Ahmes vor descoperi că rezultatul nu este exact. Aria unui disc și a unui pătrat nu coincid cu exactitate. În continuare, mulți vor încerca să răspundă la această întrebare: cum construim un pătrat a cărui arie este egală cu cea a unui cerc? Mulți se vor strădui în zadar să răspundă la această întrebare și pe bună dreptate. Ahmes, fără să știe, a fost unul dintre primii care s-a aplecat asupra unei probleme care va deveni mai târziu una dintre cele

[1] Panta unei fețe a piramidei, numită *seked* în egipteană, corespunde unei distanțe orizontale între două puncte a căror înălțime diferă cu un cot. *(N.a.)*

mai mari provocări matematice ale tuturor timpurilor: cvadratura cercului.

Și în China se caută să se calculeze suprafața câmpurilor circulare. Următoarea problemă este extrasă din primul dintre cele *Nouă capitole.*

Să presupunem că am avea un câmp circular de 30 bu circumferință și 10 bu diametru. Ce suprafață are câmpul?[1]

Aici, un *bu* este echivalentul a aproximativ 1,4 metri. Ca și în Egipt, matematicienii chinezi își prind urechile cu această figură geometrică. Știm astăzi că acest enunț este fals, deoarece un disc având diametrul 10 are o circumferință ușor superioară lui 30. Acest lucru nu îi împiedică pe savanții chinezi să dea o valoare aproximativă ariei (75 bu) și nici să complice mai mult lucrurile intrând în probleme care privesc inelele circulare:

Să presupunem că avem un câmp în formă de inel a cărui circumferință interioară este de 92 bu, circumferința exterioară 122 bu și diametrul transversal 5 bu. Se cere să se afle aria câmpului.

Ne îndoim că ar fi existat vreodată în China antică un câmp în formă de inel și bănuim că aceste ultime probleme cu care s-au ocupat savanții

[1] Traducere de Karine Chemla și Shuchun Guo, *Les neuf chapitres,* Éditions Dunod, 2005. *(N.a.)*

> Imperiului de Mijloc, prinși în jocul geometriei, și le-au pus din pură curiozitate de natură teoretică. Și în zilele noastre, una dintre modalitățile preferate de matematicieni pentru petrecerea timpului liber este aceea de a găsi figuri geometrice din ce în ce mai improbabile și cu forme cât mai neregulate, pentru a le studia și a le înțelege.

Trebuie să-i includem printre meseriașii care țin de geometrie și pe bematiști[1]. Dacă măsurătorii sau alți întinzători de sfoară au ca obiectiv să măsoare câmpurile și clădirile, bematiștii văd lucrurile la o scară mai mare. În Grecia, acești oameni au ca sarcină să măsoare distanțele mari numărând pașii.

Uneori, sarcina aceasta îi conduce departe, foarte departe de casă. Astfel, în secolul al IV-lea înaintea erei noastre, Alexandru cel Mare a luat cu el câțiva bematiști în campania de cucerire a Asiei, care l-a dus până la frontiera cu India actuală. În acest caz era vorba de trasee de mai multe mii de kilometri pe care geometrii pedeștri le aveau de măsurat.

Luați puțină distanță și imaginați-vă pentru un moment spectacolul straniu pe care îl dădeau acești oameni cu pas cadențat traversând întinderile imense ale Orientului Mijlociu. Priviți-i cum străbat platourile Mesopotamiei de Sus, mergând de-a lungul peisajelor aride și galbene ale Peninsulei Sinai pentru a ajunge pe malurile fertile ale Văii Nilului, apoi făcând cale întoarsă, croindu-și cu îndrăzneală drum prin regiunile muntoase

[1] Bematiștii erau un fel de topografi ai Antichității. Termenul provine din greacă: Βηματιστής. Pașii se numeau *bemi. (N.t.)*

ale Imperiului Persan și prin deșerturile din Afganistanul de astăzi. Îi vedeți mergând necontenit într-un ritm sacadat și monoton, trecând cu piciorul munții imenși ai lui Hindu Kush pentru a reveni pe malurile Oceanului Indian? Fără încetare își numără continuu pașii...

Imaginea este izbitoare, iar sarcina lor epuizantă pare a fi o nebunie. Cu toate acestea, rezultatele lor sunt de o precizie remarcabilă: în medie, există o diferență mai mică de 5% între măsurătorile lor și distanțele reale pe care le cunoaștem astăzi. Bematiștii lui Alexandru au permis astfel ca geografia regatului său să fie descrisă așa cum niciodată în istorie nu s-a mai întâmplat pentru o întindere atât de vastă.

Două sute de ani mai târziu, în Egipt, un savant de origine greacă, pe numele său Eratostene, imaginează un proiect încă și mai îndrăzneț: acela de a măsura circumferința... Pământului. Nici mai mult, nici mai puțin! Bineînțeles că nu se pune problema de a-i trimite pe sărmanii bematiști să facă înconjurul Pământului. Cu toate acestea, datorită unor observații minuțioase asupra diferenței de înclinare a razelor soarelui între orașele Syene, actualul Assouan, și Alexandria, Eratostene a calculat că distanța între cele două orașe trebuia să reprezinte a cincizecea parte din circumferința totală a Pământului.

Firește că și el a făcut apel la bematiști pentru a confirma măsurătoarea. Contrar bematiștilor greci, cei egipteni nu-și numără direct pașii, ci numără pașii cămilelor care îi însoțesc. Animalul acesta este renumit pentru regularitatea cu care pășește. După lungi zile de călătorie de-a lungul Nilului, rezultatul a sosit: cele două orașe sunt separate de

5 000 de stadii, iar circumferința planetei noastre este deci de 250 000, adică 39 375 kilometri. Încă o dată, rezultatul este de o precizie nemaipomenită când știm că astăzi mărimea exactă a acestei circumferințe este de 40 008 km. Asta înseamnă că marja de eroare este sub 2%.

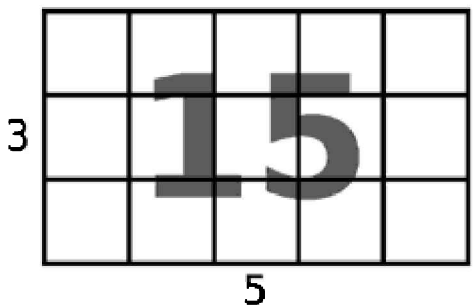
Mai mult decât oricare alt popor al Antichității, grecii vor acorda geometriei un loc aparte în sânul culturii lor. Ea este recunoscută pentru rigoarea și capacitatea de a forma spiritele. Pentru Platon, geometria constituie un prag obligatoriu de trecut pentru cel care dorește să devină filosof, iar legenda spune că pe frontispiciul Academiei sale era scrisă următoarea deviză: „Nimeni nu va intra aici dacă nu este geometru".

Geometria este atât de în vogă, încât va ajunge să cucerească și alte discipline. Proprietățile aritmetice ale numerelor vor fi astfel interpretate într-un limbaj geometric. Iată, de exemplu, definiția pe care Euclid o dă în cea de-a șaptea carte a *Elementelor de matematică*, datată ca aparținând secolului al III-lea înaintea erei noastre:

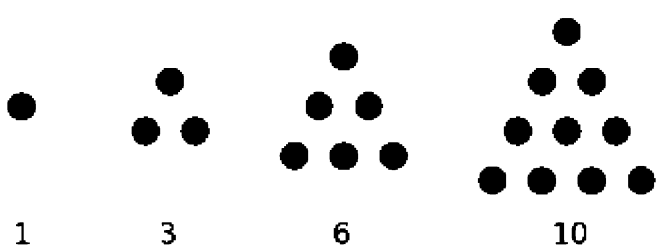
> *Când două numere se înmulțesc, rezultă un alt număr, cel care e produs se numește plan, iar laturile sale sunt numerele care s-au înmulțit.*

Dacă înmulțesc 5 x 3, numerele 5 și 3 se numesc, așadar, după Euclid, „laturile" înmulțirii. De ce așa? Pur și simplu, deoarece o înmulțire se poate reprezenta ca suprafața unui dreptunghi. Dacă acesta are o lățime egală cu 3 și o lungime de 5, aria sa are valoarea de 5 x 3. Numerele 3 și 5 constituie laturile dreptunghiului.

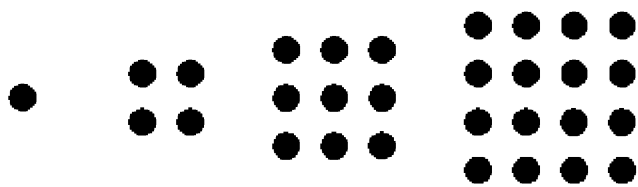
Rezultatul înmulțirii, adică 15, este denumit „plan“, deoarece acesta corespunde din punct de vedere geometric unei suprafețe.



Construcții similare sunt valabile și pentru alte figuri geometrice. Astfel, un număr este numit triunghiular dacă poate fi reprezentat în formă de… triunghi. Primele trei numere triunghiulare sunt 1, 3, 6 și 10.



Acest din urmă triunghi, de 10 puncte, nu este altul decât faimosul tetractis al lui Pitagora, iar discipolii lui au făcut din el simbolul armoniei Cosmosului. Mergând pe același principiu, regăsim numerele pătrate, ale căror prime reprezentante sunt: 1, 4, 9, 16.



1 4 9 16

Și am putea să continuăm în felul acesta mult timp, cu diverse figuri. Reprezentarea geometrică a numerelor ne permite să facem vizibile și evidente proprietăți care altfel ar rămâne incomprehensibile.

Să luăm un exemplu: ați încercat vreodată să adunați numerele impare consecutive? 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + ... ? Nu? Dacă faceți acest lucru, veți descoperi un lucru uimitor. Iată-l!

$$1$$

$$1+3=4$$

$$1+3+5 = 9$$

$$1+3+5+7 = 16$$

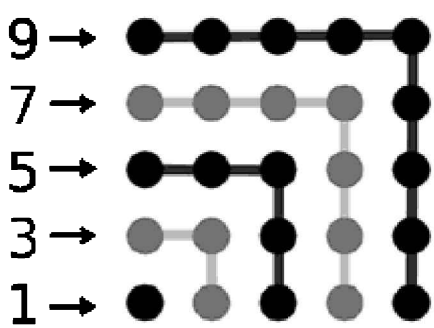
Observați particularitatea numerelor care apar? În ordine: 1, 4, 9, 16 ... sunt numerele pătrate.

Puteți continua astfel cât timp doriți, regula nu va fi niciodată încălcată. Adunați, dacă aveți curajul, primele zece numere impare de la 1 la 19 și îi veți găsi pe 100 care este al zecelea număr pătrat:

$$1+3+5+7+9+11+13+15+17+19 =$$

$$10 \times 10 = 100$$

Uimitor, nu-i așa? Dar de ce? Prin ce miracol regăsim această proprietate care este mereu adevărată? Am putea, desigur, să oferim o demonstrație numerică, dar lucrurile sunt cu mult mai simple. Datorită reprezentării geometrice, este suficient să decupăm în felii numerele pătrate pentru ca explicația să ne sară în ochi.



Fiecare felie adaugă un număr impar de bile, care crește, în același timp, cu o unitate latura pătratului. E dovedit simplu și limpede.

Pe scurt, în regatul matematicii, geometria este regină și fiecare afirmație din cadrul ei nu va putea fi validată fără să fie trecută prin filtrul său. Hegemonia sa va dura cu mult dincolo de Antichitate și de civilizația greacă. Va trebui să așteptăm mai mult de două mii de ani până când savanții Renașterii vor declanșa o imensă mișcare de modernizare a matematicii, care va detrona geometria în favoarea unui limbaj cu totul nou: acela al algebrei.

4

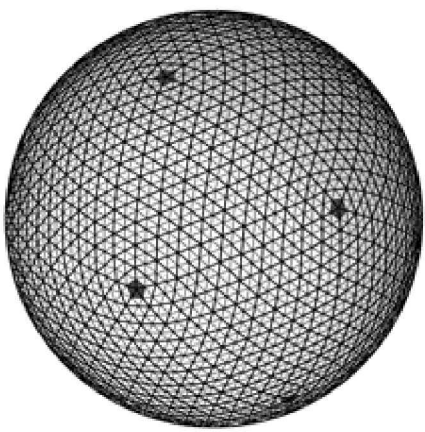
Epoca teoremelor

Iată-ne la începutul lunii mai. Este amiază și soarele strălucește deasupra parcului Villette din nordul Parisului. În fața mea se află Orașul Științelor și Industriei, având în prim-plan Geoda. Această stranie sală de cinema, construită la mijlocul anilor '80, seamănă cu o bilă imensă din fațete, care are treizeci și șase de metri în diametru.

Locul este foarte aglomerat. Aici se găsesc turiști cu aparate de fotografiat, veniți să vadă curioasa cupolă pariziană. Sunt familii care își fac plimbarea de miercuri. Ici, colo vezi câțiva îndrăgostiți așezați pe iarbă sau mergând ținându-se de mână. Alergători răzleți fac zigzaguri prin mulțimea din cartier, care trece indiferentă și care abia dacă aruncă o privire spre strania apariție a acestei sfere reflectorizante din mijlocul vieții lor cotidiene. În jurul bilei, copiii se amuză observând imaginile deformate ale lumii care îi înconjoară.

În ceea ce mă privește, mă aflu astăzi aici deoarece geometria mă interesează în mod special. Mă apropii de Geodă, examinând-o cu atenție. Suprafața sa este alcătuită din mii de oglinzi triunghiulare, asamblate unele lângă altele. La prima vedere, întregul ansamblu pare perfect regulat, dar după câteva minute de observare a cupolei, încep să văd mai multe neregularități. În jurul

anumitor puncte foarte precise, triunghiurile se deformează și se lărgesc ca și cum o malformație a structurii ar trage de ele. Cu toate că aproape pe toată suprafața sferei oglinzile triunghiulare formează o înlănțuire perfect regulată alcătuind grupuri hexagonale de câte șase, există o duzină de puncte particulare în jurul cărora triunghiurile nu formează decât grupuri de câte cinci.



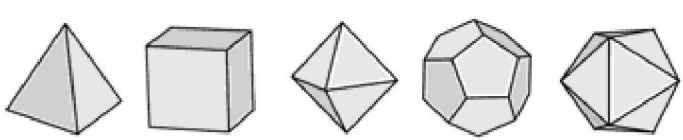
Reprezentarea Geodei cu ale sale mii de triunghiuri.
Punctele în care triunghiurile formează grupuri de câte cinci
sunt semnalate prin gri-închis.

La o primă privire, neregularitățile sunt aproape invizibile. Cei mai mulți trecători nici măcar nu dau atenție acestui lucru. Totuși, în ochii mei de matematician ele nu sunt deloc uimitoare. Aș putea să spun chiar că mă așteptam să le găsesc. Arhitectul nu a făcut nicio greșeală. În lume există, de altfel, numeroase alte construcții cu

o geometrie asemănătoare și toate au această duzină de puncte în care piesele de bază formează grupuri de câte cinci, în loc de câte șase. Aceste puncte sunt rezultatul unor constrângeri geometrice de neocolit, descoperite acum mai mult de două mii de ani de către matematicienii greci.

Theaitetos din Atena este un matematician din secolul al IV-lea înaintea erei noastre și lui i se atribuie, în general, descrierea completă a poliedrelor regulate. În geometrie, un poliedru este pur şi simplu o figură cu un volum, delimitată de mai multe fețe plane. Astfel, cuburile și piramidele fac parte din familia poliedrelor, contrar sferelor și cilindrelor, ale căror fețe sunt rotunjite. Geoda, cu fețele sale triunghiulare, poate fi considerată drept un poliedru gigantic, chiar dacă numărul mare de fețe face ca, văzută de departe, să semene cu o sferă.

Theaitetos se va interesa în mod special de poliedrele care au o simetrie perfectă. Adică de acelea care au toate fețele și toate unghiurile egale. Iar descoperirea sa este cel puțin surprinzătoare: el nu a găsit decât cinci poliedre și a demonstrat că nu există altele în afară de acestea. Cinci solide și asta-i tot. Nici măcar unul în plus.



De la stânga la dreapta: tetraedru, hexaedru, octaedru, dodecaedru și icosaedru.

Și astăzi folosim denumirile poliedrelor după numărul fețelor scris în greaca veche, urmat de sufixul *–edru*. Astfel, cubul cu cele șase fețe pătrate poartă denumirea în geometrie de hexaedru. Tetraedrul, octaedrul, dodecaedrul și icosaedrul au patru, opt, douăsprezece și douăzeci de fețe. Mai târziu, li se va da acestor cinci poliedre numele de „solide ale lui Platon".

Ale lui Platon? De ce nu ale lui Theaitetos? Uneori, istoria este nedreaptă, iar descoperitorii nu sunt întotdeauna cei care primesc laudele din partea posterității. Filosoful atenian nu a contribuit cu nimic la descoperirea celor cinci solide, dar el le-a făcut celebre printr-o teorie care le asociază cu elementele din Cosmos. Focul este asociat tetraedrului, pământul hexaedrului, aerul octaedrului și apa icosaedrului. În ceea ce privește dodecaedrul, cu fețele sale pentagonale, Platon consideră că Universul are forma acestuia. Această teorie a fost de mult timp abandonată de știință, dar cu toate acestea lui Platon i se atribuie cele cinci poliedre regulate.

Pentru a fi corecți, trebuie să spunem că Theaitetos nu a fost nici el primul care a descoperit aceste cinci solide. Se găsesc modele sculptate sau descrieri scrise ale acestora cu mult mai vechi. O colecție de biluțe din piatră sculptată care reproduc formele solidelor lui Platon a fost descoperită în Scoția și ar data cu o mie de ani înaintea matematicianului grec. Aceste piese sunt astăzi păstrate la Ashmolean Museum de la Oxford.

Așadar, nici Theaitetos nu este mai breaz decât Platon? E cumva un impostor? Ba deloc, căci chiar dacă cele cinci figuri au fost cunoscute înaintea lui,

el a fost primul care a demonstrat în mod clar că lista este completă. Inutil să căutăm mai multe, ne spune Theaitetos, nimeni nu va găsi niciodată altele în plus. Afirmația lui are ceva convingător în ea. Ne scoate dintr-o îndoială înfiorătoare. Uff! Le avem pe toate aici.

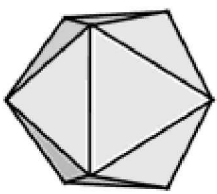
Această etapă este semnificativă pentru modul în care matematicienii greci vor aborda matematica. Pentru ei nu este vorba doar să fie găsite soluții care funcționează. Ei doresc să epuizeze problema. Doresc să fie siguri că nimic nu le scapă. Iar pentru acest lucru vor perfecționa la modul absolut arta explorării matematicii.

Să revenim acum la Geoda noastră. Demonstrația lui Theaitetos ne lasă fără drept de replică; este imposibil pentru un poliedru, având mai multe sute de fețe, să fie perfect regulat. În cazul acesta, cum procedăm atunci când suntem arhitecți și dorim să creăm o clădire care seamănă, pe cât posibil, cu o sferă perfectă? Este greu din punct de vedere tehnic să concepem edificiul dintr-o singură bucată. Nu este nimic de făcut, asta e clar! Trebuie să asamblăm o multitudine de mici fețe. Dar cum se creează o astfel de structură?

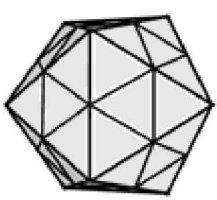
Se pot imagina diferite soluții. Una dintre ele constă în a lua unul dintre solidele lui Platon, pe care îl modificăm. De exemplu, să privim icosaedrul. Cu cele douăzeci de fețe triunghiulare, acesta este cel care pare cel mai rotund dintre cele cinci. Pentru a-l face mai rotunjit este posibil să decupăm fiecare din fețele sale în mai multe fețe mai mici. Poliedrul obținut poate fi atunci deformat

ca și cum l-am umfla suflând în el pentru a-l aduce cât mai aproape de forma unei sfere.

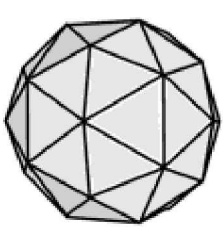
Iată, de exemplu, ce se întâmplă dacă subdivizăm fiecare față a icosaedrului în patru triunghiuri mai mici.



Icosaedru



Icosaedru cu fețele decupate în patru



Icosaedru cu fețele decupate și umflat

Un astfel de poliedru se numește în geometrie... o geodă, adică din punct de vedere etimologic este vorba despre o figură care are forma Pământului, deci care seamănă cu o sferă. În principiu, nu e nimic complicat aici. Exact acest tip de construcție este utilizat pentru Geoda din piața Villette, doar că subdiviziunea fețelor este mult mai rafinată. Triunghiurile de la baza icosaedrului sunt, de această dată, decupate în 400 de triunghiuri mai mici, ceea ce ne conduce la un total de 8 000 de fațete triunghiulare.

În realitate, Geoda numără mai puțin de 8 000 de fațete, adică 6 433, pentru că ea nu este completă. Baza acesteia, cea care stă pe sol, este trunchiată și anumite triunghiuri lipsesc. Totuși, această structură explică prezența celor douăsprezece neregularități. Ele corespund celor douăsprezece vârfuri ale icosaedrului de bază. Altfel spus, sunt punctele în care marile triunghiuri de plecare se intersectau câte cinci pentru a forma vârfurile icosaedrului. Aceste vârfuri, ascuțite la început, au fost aplatizate în timpul multiplicării fețelor până într-atât încât au devenit aproape invizibile. Totuși prezența lor rămâne vizibilă în angrenajul triunghiurilor, iar cele douăsprezece neregularități sunt acolo pentru a aduce aminte de existența lor trecătorilor atenți.

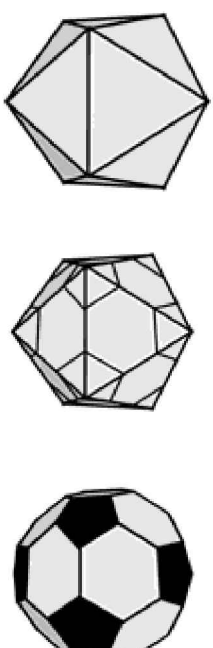
Fără îndoială că Theaitetos nu și-ar fi imaginat vreodată că descoperirile sale vor conduce într-o bună zi la construcția unor edificii precum Geoda. În aceasta constă marea capacitate a matematicii pe care savanții Greciei Antice o vor dezvolta: matematica are o extraordinară capacitate de a crea idei noi. Grecii vor începe puțin câte puțin să-și separe întrebările de problemele concrete și să

genereze astfel, din simplă curiozitate intelectuală, modele originale și inspirațională. Cu toate că pare adesea că nu au niciun fel de utilizare concretă în momentul în care sunt imaginate, aceste modele ajung câteodată să se dovedească de o utilitate uimitoare la multă vreme după dispariția creatorilor acestora.

În zilele noastre regăsim cele cinci solide ale lui Platon în diferite contexte. De exemplu, acestea sunt folosite ca zaruri în jocurile de societate. Regularitatea lor îi conferă zarului echilibrul, adică toate fețele au aceleași șanse de a ieși. Toată lumea cunoaște zarul cubic cu șase fețe, dar jucătorii cei mai împătimiți știu că multe jocuri folosesc și celelalte patru forme pentru a multiplica atât sarisfacția, cât și probabilitățile.

În timp ce mă depărtez de Geodă, mă intersectez puțin mai încolo cu niște copii care au început un meci de fotbal pe peluza din piața Villette folosindu-se de o minge improvizată. Nu-și pun problema, dar în clipa asta și ei îi datorează recunoștință lui Theaitetos. Au văzut, oare, că mingea are motive geometrice? Cele mai multe mingi de fotbal sunt create după același model: douăzeci de piese hexagonale (cu șase laturi) și douăsprezece piese pentagonale (cu cinci laturi). Pe mingile obișnuite hexagoanele sunt albe, în timp ce pentagoanele sunt negre. Și chiar atunci când suprafața mingii este imprimată cu imagini diferite și variate, este suficient să privim cu atenție contururile care delimitează diferitele bucăți pentru a putea să regăsim inevitabil cele douăzeci de hexagoane și douăsprezece pentagoane.

Un icosaedru trunchiat! Iată numele pe care îl dau geometrii mingii de fotbal. Structura acesteia este motivată de aceleași rațiuni precum Geoda: ea trebuie să aibă cea mai regulată și rotundă formă posibilă. Numai că, pentru a ajunge la acest rezultat, creatorii acestui model au utilizat o metodă diferită. În loc să subdivizeze fețele pentru a putea să rotunjească unghiurile, ei au ales să taie unghiurile. Imaginați-vă un icosaedru din plastilină și luați un cuțit pentru a-i tăia vârfurile. Cele douăzeci de triunghiuri care au vârfurile tăiate devin hexagoane, iar cele douăsprezece vârfuri retrase fac să apară cele douăsprezece pentagoane.



Cele douăsprezece pentagoane de pe mingea de fotbal au așadar aceeași origine cu a celor douăsprezece neregularități de pe suprafața Geodei; adică acestea reprezintă locurile originare ale celor douăsprezece vârfuri ale icosaedrului.

Ce este cu fata aceasta cu o batistă în mână, pe care o întâlnesc în momentul în care părăsesc parcul Villette? Pare că are ceva. Să fie, oare, victima unei proliferări urâte a microicosaedrelor? Anumite organisme microscopice, precum virusurile, au în mod natural forma icosaedrelor sau a dodecaedrelor. Așa este, de exemplu, cazul rhinovirusurilor care sunt responsabile de cea mai mare parte a răcelilor.

Dacă aceste creaturi minuscule adoptă asemenea forme se întâmplă din aceleași rațiuni pentru care noi le folosim în arhitectură sau pentru a face mingi. Adică există o grijă pentru simetrie și economie. Datorită icosaedrelor, mingile nu sunt compuse decât din două tipuri de petice diferite. În același fel, membrana virusurilor nu este compusă decât din câteva tipuri de molecule diferite (patru în cazul rhinovirusului), care se întrepătrund unele cu altele, repetând mereu același motiv. Codul genetic necesar creării unui asemenea înveliș este așadar mult mai concis și economic decât dacă ar fi trebuit să creeze o structură fără nicio simetrie.

Iată încă o dată cum Theaitetos ar fi fost foarte uimit să vadă până unde merg poliedrele sale.

Să părăsim definitiv parcul Villette și să reluăm cursul cronologic al poveștii noastre. Cum au ajuns matematicienii antici, precum Theaitetos, să-și pună

întrebări din ce în ce mai generale și teoretice? Pentru a înțelege acest lucru trebuie să ne întoarcem cu câteva mii de ani în urmă, pe marginea estică a Mediteranei.

În timp ce culturile babiloniene și egiptene se sting încetul cu încetul, Grecia Antică va cunoaște momentele sale de glorie. Începând cu secolul al VI-lea înaintea erei noastre, lumea greacă intră într-o perioadă de fierbere culturală și științifică fără precedent. Filosofia, poezia, sculptura, arhitectura, teatrul, medicina și chiar istoria sunt tot atâtea discipline care vor cunoaște o adevărată revoluție. Chiar și astăzi, vitalitatea extraordinară a acestei perioade are partea sa de fascinație și mister. În această vastă mișcare intelectuală, matematicienii vor ocupa un loc de frunte.

Când ne gândim la Grecia Antică, prima imagine care ne vine în minte este cea a orașului Atena, dominată de Acropole. Să ne imaginăm, rătăcind printre templele din marmură ale muntelui Pentelicon și printre câțiva măslini, câțiva cetățeni în togă albă care tocmai inventaseră prima democrație din istorie. Această imagine este totuși departe de reprezentarea întregii lumi grecești cu toată diversitatea sa.

În secolele al VIII-lea și al VII-lea înaintea erei noastre, o mulțime de colonii grecești și-au croit drum spre țărmurile mediteraneene. Aceste colonii s-au amestecat adesea cu popoarele locale, adoptând, în parte, obiceiurile și modul lor de viață. Nu toți grecii au același mod de viață. Alimentația lor, opțiunile de a petrece timpul liber, credințele, sistemele politice variază foarte mult de la o regiune la alta.

Apariția matematicii grecești nu va porni așadar dintr-un singur loc, unde toți savanții se cunosc și se întâlnesc zi de zi, ci dintr-o zonă vastă din punct de vedere geografic și cultural. Contactul dintre cele mai vechi civilizații va constitui unul dintre motoarele revoluției matematice, revoluție care va deveni moștenitoarea și fermentul pentru propria-i diversitate. Vor exista numeroși savanți care vor efectua în timpul vieții un pelerinaj în Egipt sau în Orientul Mijlociu, ca pe o călătorie obligatorie pentru formarea lor. O bună parte dintre matematicienii babilonieni și egipteni se vor regăsi astfel integrați și continuați de către savanții greci.

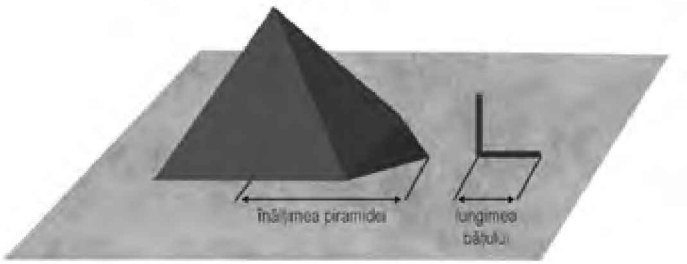
Pe coasta de sud-est a Turciei actuale, în orașul Milet, la sfârșitul secolului al VII-lea înaintea erei noastre, se va naște Thales, primul mare matematician grec. În ciuda numeroaselor surse care îl menționează, este totuși greu astăzi să extragem informațiile veridice cu privire la viața și lucrările sale. Precum în cazul multor savanți ai acestei epoci, diferite legende vor fi născocite după moartea sa de către discipolii cam zeloși, legende care merg până într-acolo încât este dificil să mai deosebim între adevăr și fals. Oamenii de știință ai acestei epoci nu obișnuiau să se încurce cu eticile prea constrângătoare și nu era deloc o raritate să remarci că negociau cu adevărul când acesta nu era conform gusturilor lor.

Printre numeroasele povești care circulă despre el se spune, de exemplu, că Thales era foarte distrat. Savantul milesian ar fi fost unul dintre primele exemplare cu capul în nori dintr-o lungă tradiție de savanți. O anecdotă

zice că, într-o noapte, a căzut într-un puț în timp ce se plimba cu nasul pe sus, observând stelele. O alta ne spune că a murit în jurul vârstei de 80 de ani în vreme ce asista la o competiție sportivă; era atât de captivat de spectacol, încât a uitat să bea și să mănânce.

Realizările sale științifice sunt și ele obiectul unor povestiri interesante. Thales ar fi fost primul care a prezis în mod corect o eclipsă de Soare. Această eclipsă a apărut în plină bătălie între Medes și lydieni, pe malurile fluviului Halys, în vestul Turciei de azi. Văzând că se face noapte în plină zi, combatanții au crezut că e un mesaj al zeilor și s-au decis imediat să încheie tratatul de pace. Astăzi, a prezice eclipsele sau a le reconstitui pe cele din trecut a devenit un joc de copii pentru astronomi. Datorită lor știm că această eclipsă a avut loc în 28 mai 584 înaintea erei noastre, făcând din bătălia de la Halys evenimentul istoric cel mai vechi pe care îl putem data cu o asemenea precizie.

În cursul călătoriei lui Thales în Egipt, acesta va realiza ceea ce mai târziu va fi considerată cea mai mare reușită a sa. Se povestește că însuși faraonul Amasis i-a lansat provocarea de a măsura înălțimea Marii Piramide. Până atunci, savanții egipteni care au fost consultați în vederea acestui lucru au eșuat cu toții. Thales nu numai că va face față provocării, dar o va face foarte elegant, folosindu-se de o metodă extrem de îndrăzneață. Savantul milesian va înfige un băț perfect vertical în sol și va aștepta momentul zilei în care lungimea umbrei va fi egală cu înălțimea. În acel moment, a măsurat umbra piramidei, care și ea era egală cu înălțimea. Iată cum a făcut față provocării!



Desigur că povestea este drăguță, dar încă o dată realitatea sa istorică rămâne nesigură. Așa cum este povestită, anecdota îi pune într-o lumină foarte proastă pe savanții egipteni ai epocii, deși papirusuri precum cel al lui Ahmes ne arată că egiptenii știau foarte bine să calculeze înălțimea piramidelor cu mai mult de o mie de ani înainte de sosirea lui Thales. Atunci, unde este adevărul? A măsurat într-adevăr înălțimea piramidei? A fost el primul care a utilizat metoda umbrei? Nu cumva el a măsurat înălțimea unui măslin din fața casei sale din Milet și discipolii lui sunt cei care au înfrumusețat povestea după moartea sa? Probabil că niciodată nu vom ști adevărul.

Orice ar fi, geometria lui Thales se verifică și, indiferent dacă a aplicat-o la o piramidă sau la un măslin, metoda umbrei rămâne într-adevăr genială. Ea constituie un caz particular al unei proprietăți căreia îi dăm astăzi numele său: teorema lui Thales. Multe alte rezultate matematice îi sunt atribuite lui Thales: cercul este împărțit în două părți egale de orice diametru (fig. 1), unghiurile de la baza unui triunghi isoscel sunt egale (fig. 2), două drepte secante au unghiurile opuse la vârf egale (fig. 3), dacă un triunghi are toate cele trei vârfuri pe un cerc și

o latură trece prin centrul cercului, atunci acest triunghi este dreptunghic (fig. 4). Și acest din urmă enunț mai poartă câteodată numele de teorema lui Thales.

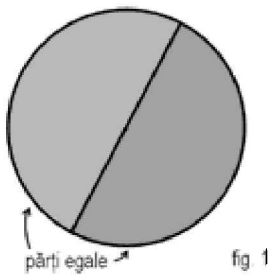


fig. 1

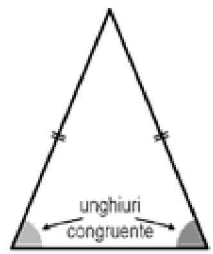


fig 2

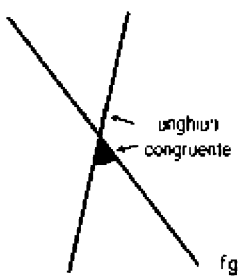


fig 3

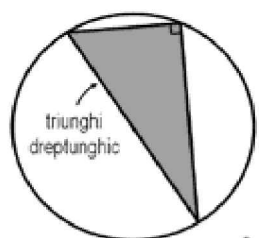


fig. 4

Ajungem astfel la acest cuvânt straniu care, pe cât de mult fascinează, pe atât de mult provoacă frică: ce este o teoremă? Din punct de vedere etimologic, cuvântul provine din rădăcinile grecești *théa* (contemplare) și *horáô (*a vedea, a privi). Astfel, o teoremă ar fi un fel de observație asupra lumii matematice, un fapt care ar fi fost constatat, examinat și apoi consemnat de către matematicieni. Teoremele pot fi transmise oral sau în scris și seamănă cu rețetele bunicii sau cu proverbele meteorologice care au fost dovedite de-a lungul timpului și în adevărul cărora

avem încredere. Rândunelele vestesc primăvara, dafinul calmează reumatismul și triunghiul 3–4–5 are un unghi drept. Acestea sunt lucruri pe care le considerăm adevărate și pe care căutăm să ni le amintim pentru a le reutiliza în anumite momente.

Conform acestei definiții, mesopotamienii, egiptenii și chinezii își enunțau și ei teoremele. Totuși, începând cu Thales, grecii le vor da acestora o nouă dimensiune. Pentru ei, o teoremă nu trebuie să enunțe doar un adevăr matematic, ci acesta trebuie să fie formulat în modul cel mai general cu putință și să fie însoțit de o demonstrație care îl validează.

Să revenim asupra uneia dintre propozițiile atribuite lui Thales: diametrul unui cerc îl împarte pe acesta în două părți egale. O asemenea afirmație poate părea dezamăgitoare venind din partea unui savant de anvergura lui Thales. Este evident că așa stau lucrurile. Cum de a trebuit să așteptăm secolul al VI-lea înaintea erei noastre pentru ca o asemenea afirmație banală să fie enunțată? Nimeni nu pune la îndoială că savanții egipteni și babilonieni știau acest lucru de mult timp.

Totuși nu trebuie să ne grăbim. Ceea ce face îndrăzneață ideea savantului milesian nu constă atât în conținutul, cât în formularea sa. Thales îndrăznește să vorbească despre un cerc fără să precizeze care este acesta. Pentru a enunța aceeași regulă, babilonienii, egiptenii sau chinezii ar fi dat un exemplu. Trasați un cerc de rază 3 și unul dintre diametrele sale, ar fi spus aceștia; acest cerc este divizat în două părți egale de către acest diametru. Iar dacă un exemplu nu era suficient pentru a înțelege regula, se

dădeau un al doilea, un al treilea, un al patrulea exemplu dacă era nevoie. Se dădeau atâtea exemple câte erau necesare pentru ca interlocutorul să înțeleagă că și el poate să repete aceeași operație pentru oricare cerc pe care l-ar întâlni. Dar niciodată nu este formulată afirmația generală!

Thales a depășit o limită. Luați un cerc, oricare ar fi el, nu mă interesează să știu! Poate fi imens sau minuscul! Desenați-l pe orizontală, pe verticală sau pe un plan înclinat, îmi este indiferent! Nu mă interesează deloc cercul dumneavoastră în particular și nici nu mă interesează modalitatea în care l-ați desenat! Cu toate acestea, afirm cu putere că diametrul său îl va tăia în două părți egale.

Prin această operație, Thales acordă definitiv figurilor geometrice statutul de obiecte matematice abstracte. Această etapă a gândirii este asemănătoare cu cea care i-a făcut cu două mii de ani mai devreme pe mesopotamieni să considere numerele ca fiind independente de obiectele numărate. Un cerc nu mai este o figură desenată pe pământ, pe o tăbliță sau pe un papirus. Cercul devine o ficțiune, o idee, un ideal abstract ale cărui reprezentări reale, oricare ar fi acestea, nu sunt decât avataruri imperfecte ale lui.

De acum încolo, adevărurile matematice vor putea fi enunțate concis și general, independent de diferitele cazuri particulare în care se aplică. Din acest moment, grecii vor numi aceste enunțuri teoreme.

Thales a avut mai mulți discipoli în Milet. Doi dintre aceștia, cei mai cunoscuți, au fost Anaximene și Anaximandru. Anaximandru a avut la rândul său discipoli și printre ei s-a numărat un anume Pitagora, care va

da numele său uneia dintre cele mai cunoscute teoreme din toate timpurile.

Pitagora s-a născut la începutul secolului al VI-lea înaintea erei noastre în insula Samos, situată în regiunea Turciei de astăzi, la doar câțiva kilometri de orașul Milet. După o tinerețe petrecută în călătorii de studii în lumea antică, Pitagora și-a ales ca domiciliu orașul Crotona, în sud-estul Italiei de astăzi. Aici va fonda școala sa în anul –532[1].

Pitagora și discipolii lui nu sunt doar matematicieni și oameni de știință. Ei sunt totodată și filosofi, oameni religioși și oameni politici. Trebuie totuși să spunem că, dacă am transpune în epoca noastră comunitatea inițiată de Pitagora, atunci aceasta ar fi considerată fără îndoială o sectă extrem de obscură și periculoasă. Existența pitagoreicilor era coordonată de un ansamblu de reguli precise. Oricine dorea să facă parte din această școală era nevoit să petreacă o perioadă de cinci ani în liniște. Pitagoreicii nu dețin nimic personal; toate bunurile lor sunt puse în comun. Pentru a se recunoaște între ei, aceștia folosesc diferite simboluri, precum tetractisul sau pentagrama în formă de stea cu cinci colțuri. De altfel, pitagoreicii se consideră persoane iluminate și socotesc că este normal ca puterea politică să le aparțină. Aceștia se opun cu fermitate revoltelor care au loc în orașele ce le refuză autoritatea. Chiar într-o astfel de răscoală Pitagora își va găsi moartea, la vârsta de 85 de ani.

Numărul legendelor de toate felurile inventate în jurul lui Pitagora este cu adevărat impresionant. Discipolii

[1] Autorul folosește numere negative pentru a identifica anii dinainte de Hristos. *(N.r.)*

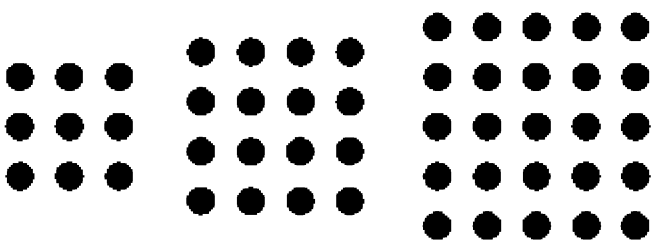
săi nu au fost deloc lipsiți de imaginație, judecați singuri: după ei, Pitagora ar fi fost fiul zeului Apollo. De altfel, chiar numele său, Pitagora, înseamnă literal „cel care a fost anunțat de către Pythia", adică Pythia din Delphi, respectiv oracolul templului lui Apollo, și chiar aceasta i-a înștiințat pe părinții lui Pitagora de viitoarea naștere a urmașului lor. Conform oracolului, Pitagora trebuia să devină cel mai frumos și cel mai înțelept dintre oameni. Încă din naștere, savantul grec era predestinat marilor realizări. Pitagora își aducea aminte de toate viețile sale anterioare. De exemplu, el spunea că a fost unul dintre eroii războiului troian și purta numele de Euphorbe. În tinerețe, Pitagora a participat la Jocurile Olimpice și a câștigat toate probele de pugilat (strămoșul boxului de azi). Pitagora este inventatorul primelor game muzicale. Era capabil să meargă prin aer. A murit și a fost readus la viață. Avea talente de ghicitor și de vindecător. Controla animalele. Avea o coapsă de aur.

Dacă majoritatea legendelor sunt destul de ciudate pentru a le acorda atenție, pentru altele, în schimb, este greu să ne pronunțăm. De exemplu, este oare adevărat că Pitagora a fost primul care a utilizat cuvântul „matematică"? Faptele sunt atât de îndoielnice, încât anumiți istorici au susținut chiar ipoteza că Pitagora nu a fost decât un personaj fictiv, imaginat de pitagoreici pentru a le servi drept figură tutelară.

În aceste condiții, dacă nu putem să aflăm mai multe despre omul Pitagora, să revenim la ceea ce toți elevii din lume știu de mai bine de două mii de ani după moartea sa: teorema lui Pitagora. Ce ne spune această vestită

teoremă? Enunțul său poate părea uimitor, căci el stabilește o legătură între două noțiuni matematice care par să nu aibă un raport între ele: triunghiurile dreptunghice și numerele pătrate.

Să reluăm triunghiul nostru dreptunghic preferat, cel cu dimensiunile 3–4–5. Pornind de la lungimile celor trei laturi ale sale, este posibil să construim trei numere pătrate 9, 16, 25.



Putem observa o coincidență amuzantă: 9 + 16 = 25. Suma pătratelor laturilor 3 și 4 este egală cu pătratul laturii de 5. Am putea crede că este vorba de o întâmplare, dar, cu toate acestea, dacă am încerca să reproducem calculul cu un alt triunghi dreptunghic, vom vedea că regula merge în continuare aplicată. Să luăm de exemplu triunghiul 65–72–97, pe care îl găsim pe tăblița babiloniană Plimpton. Cele trei numere pătrate sunt 4 225, 5 184 și 9 409. Și iarăși vom regăsi rezultatul: 4 225 + 5 184 = 9 409. Cu astfel de numere mari este greu să mai credem că este vorba de o simplă coincidență.

Puteți să încercați cu toate triunghiurile dreptunghice pe care le doriți – mici sau mari, înguste sau largi –, veți regăsi mereu aceleași rezultate. Într-un triunghi dreptunghic, suma pătratelor celor două laturi care formează unghiul drept este întotdeauna egală cu pătratul celei de-a treia laturi, pe care o vom numi ipotenuză. De asemenea, lucrurile merg și în sens invers: dacă într-un triunghi suma pătratelor celor două laturi mai mici este egală cu pătratul laturii mai mari, atunci avem de-a face cu un triunghi dreptunghic. Iată teorema lui Pitagora!

Bineînțeles că nu știm dacă Pitagora sau discipolii săi au contribuit în mod real la această teoremă. Cu toate că babilonienii nu au menționat-o niciodată sub forma generală pe care tocmai am văzut-o, este foarte probabil ca ei să fi cunoscut deja acest rezultat cu mai mult de două mii de ani înaintea lui Pitagora. Altfel cum ar fi putut să descopere cu atât de mare precizie toate triunghiurile dreptunghice prezente pe tăblița Plimpton? Probabil că și egiptenii, și chinezii aveau cunoștință de această teoremă. Ea va fi, de altfel, enunțată în mod clar în comentariile care vor fi adăugate celor *Nouă capitole* în secolele care au urmat redactării sale.

Anumite povestiri pretind că Pitagora ar fi fost primul care a realizat o demonstrație a acestei teoreme. Nicio sursă de încredere nu ne poate confirma acest lucru, iar cea mai veche demonstrație care ne-a parvenit nu se găsește decât în *Elemente de matematică,* scrisă de Euclid trei secole mai târziu.

5

Un pic de metodă

Problema dovezii va constitui una dintre principalele preocupări ale matematicii grecești. Nicio teoremă nu poate fi validată dacă nu este însoțită de o demonstrație, adică de un raționament logic precis care stabilește în mod definitiv veridicitatea sa. Trebuie să spunem că, fără această plasă de siguranță pe care o reprezintă demonstrațiile, rezultatele matematice ne pot rezerva unele surprize neplăcute. Anumite metode, cu toate că sunt recunoscute și larg utilizate, nu funcționează întotdeauna la fel de bine precum acestea.

Iată! Vă aduceți aminte de construcția din papirusul Rhind pentru a trasa un pătrat și un disc având aceeași arie? Ei bine, ea este falsă. Nu cu mult, este adevărat, dar este totuși falsă. Când măsurăm cu precizie suprafețele, găsim o diferență de aproximativ 0,5%. Suntem de acord că pentru cei care măsoară sau alți geometri de teren o asemenea precizie este mai mult decât suficientă, dar pentru teoreticienii matematicii acest lucru este inadmisibil.

Înșuși Pitagora va pica în capcana falselor ipoteze. Cea mai cunoscută eroare a sa privește lungimile comensurabile. Astfel, el crede că în geometrie două lungimi sunt întotdeauna comensurabile, adică este posibil să

găsim o unitate suficient de mică pentru a le putea măsura simultan. Imaginați-vă o linie de 9 cm și o alta de 13,7 cm. Grecii nu cunoșteau numerele cu virgulă. Ei nu măsurau lungimile decât cu numere întregi. Astfel, pentru ei, cea de-a doua linie nu este măsurabilă în centimetri. Dar nu contează, este suficient în acest caz să luăm o unitate de 10 ori mai mică pentru a spune că liniile măsoară 90 și, respectiv, 137 de milimetri. Pitagora era convins că oricare ar fi cele două linii, oricare ar fi lungimile lor, ele pot fi întotdeauna comensurate dacă se găsește unitatea de măsură adecvată.

Această convingere a fost totuși infirmată de către un pitagoreic numit Hippasos din Metapont. El a descoperit că într-un pătrat latura și diagonala sunt incomensurabile. Orice unitate de măsură am lua, nu este posibil să măsurăm cu numere întregi, în același timp, și latura pătratului, și diagonala sa. Hippasos a furnizat o demonstrație logică, nelăsând loc de îndoială cu privire la acest aspect. Pitagora și discipolii săi au fost atât de contrariați, încât Hippasos a fost exclus din școala respectivă. Se povestește că această descoperire l-a costat chiar viața, deoarece a fost dus pe mare și aruncat peste bord de către colegii săi.

Pentru matematicieni, aceste anecdote sunt înspăimântătoare. Putem oare să fim vreodată siguri de ceva? Să trăim cu frica permanentă că fiecare descoperire matematică se va nărui într-o zi? Chiar și triunghiul 3–4–5? Este oare sigur că avem de-a face cu un triunghi dreptunghic? Nu riscăm ca într-o zi să descoperim că unghiul care până acum părea perfect drept este de fapt *aproape* drept?

Chiar și astăzi, nu arareori întâlnim matematicieni care cad pradă intuițiilor înșelătoare. Iată de ce, mergând pe urmele rigorii omologilor greci, matematicienii noștri au mare grijă să facă diferența între enunțurile demonstrate pe care le numesc „teoreme" și cele pe care le consideră adevărate, dar pentru care nu au găsit încă o dovadă, iar pe acestea din urmă le numesc „conjecturi".

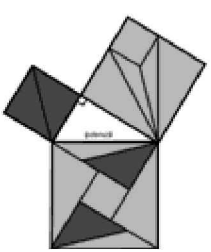
Una dintre celebrele conjecturi ale timpurilor noastre este ipoteza lui Riemann. Numeroși matematicieni au destul de multă încredere în veridicitatea acestei ipoteze, încă nedemonstrată, pentru a o pune la baza cercetărilor lor. Nu trebuie decât să așteptăm ca într-o zi această conjectură să devină teoremă și astfel toate lucrările lor vor fi validate. Dar dacă într-o zi aceasta va fi infirmată, atunci operele de o viață întreagă de cercetare ale matematicienilor respectivi se vor nărui împreună cu ea. Oamenii de știință ai secolului XXI sunt fără îndoială mult mai rezonabili decât strămoșii lor greci, deși se poate înțelege că în aceste condiții matematicianul care ar anunța falsitatea ipotezei lui Riemann va putea stârni invidii puternice printre colegii săi.

Ca să scape de această angoasă permanentă de a fi invalidați, matematicienii au nevoie de demonstrații. Nu, nu vom descoperi niciodată că 3–4–5 nu este un triunghi dreptunghic. Suntem siguri de asta, iar această certitudine provine din faptul că teorema lui Pitagora are o demonstrație. Orice triunghi care are suma pătratelor a două laturi egală cu pătratul celei de-a treia este un triunghi dreptunghic. Fără îndoială că acest enunț nu era

decât o conjectură pentru mesopotamieni. Ea a devenit teoremă odată cu grecii. Noroc cu ei!

Dar, de fapt, ce este o demonstrație? Teorema lui Pitagora nu este doar cea mai faimoasă dintre teoreme, ci este totodată și una dintre cele care dețin cel mai mare număr de demonstrații diferite. Există mai multe zeci de astfel de demonstrații. Unele dintre acestea au fost descoperite, independent, de civilizații care nu au auzit niciodată vorbindu-se despre Euclid sau despre Pitagora. Este, de exemplu, cazul demonstrațiilor pe care le găsim în comentariile celor *Nouă capitole* chinezești. Altele sunt opera unor matematicieni care cunoșteau teorema deja demonstrată, dar care, provocați fiind sau pentru a-și pune amprenta personală, s-au amuzat în a aduce noi dovezi. Printre aceștia din urmă se numără câteva nume celebre, precum cel al inventatorului italian Leonardo da Vinci sau al celui de-al douăzecilea președinte al Statelor Unite, James Abram Garfield.

Unul dintre principiile pe care le regăsim în mai multe demonstrații este acela al puzzle-ului: dacă două figuri geometrice pot fi formate plecând de la aceleași piese, atunci ele au aceeași suprafață. Priviți acest decupaj imaginat de matematicianul chinez din secolul al III-lea Liu Hui.



Cele două pătrate construite pe laturile care formează unghiul drept al triunghiului dreptunghic central sunt alcătuite din două și respectiv cinci piese. Toate acestea șapte sunt cele care alcătuiesc pătratul construit pe ipotenuză. Suprafața pătratului de pe ipotenuză este deci egală cu suma suprafețelor celor două pătrate mai mici. Iar cum suprafața unui pătrat este egală cu pătratul lungimii laturii sale, vedem în mod clar că teorema lui Pitagora este adevărată.

Trecem aici peste detalii, dar desigur că ar fi convenabil, pentru ca demonstrația să fie completă, să arătăm că toate piesele sunt perfect identice și că un asemenea decupaj funcționează pentru toate triunghiurile dreptunghice.

Pe scurt, să reluăm lanțul deductiv. De ce 3–4–5 este triunghi dreptunghic? Deoarece verifică teorema lui Pitagora. Și de ce teorema lui Pitagora este adevărată? Deoarece decupajul lui Liu Hui ne arată că pătratul de pe ipotenuză este alcătuit din aceleași piese care alcătuiesc cele două pătrate construite pe laturile care formează unghiul drept. Demonstrația seamănă cu un joc al lui „de ce", de care copiii se bucură atât de mult. Problema este că acest joculeț are dezavantajul că nu se termină niciodată. Oricare ar fi răspunsul dat unei întrebări este mereu posibil să punem din nou sub semnul întrebării acest răspuns. De ce? Da, de ce?

Să revenim la puzzle-ul nostru. Am spus că, dacă există figuri care se compun cu aceleași piese, acestea vor avea aceeași suprafață. Dar am demonstrat oare că acest principiu este mereu adevărat? Nu am putea să găsim piese ale puzzle-ului a căror suprafață să varieze

după modul în care le asamblăm? Nu-i așa că o astfel de afirmație pare absurdă? Într-atât de absurdă, încât ar fi exagerat să încercăm să o demonstrăm?! Totuși, tocmai recunoșteam cât este de important să demonstrăm totul în matematică. Suntem deja gata să renunțăm la principiile noastre chiar imediat după ce le-am adoptat?

Situația e gravă, cu atât mai mult cu cât, chiar dacă am reușit să explicăm de ce principiul puzzle-ului este adevărat, ar trebui încă să justificăm raționamentele pe care le utilizăm în vederea acestui lucru.

Matematicienii greci erau conștienți de această problemă. Pentru a face o demonstrație, trebuie totuși să plecăm de undeva. Dar prima frază a oricărei lucrări de matematică nu poate fi demonstrată. Mai precis, deoarece aceasta este... prima. Orice construcție matematică trebuie deci să înceapă prin a admite un anumit număr de evidențe prealabile. Aceste evidențe vor constitui fundamentul tuturor deducțiilor care vor urma și trebuie, așadar, alese cu foarte mare grijă.

Matematicienii numesc „axiome" aceste evidențe. Axiomele sunt enunțuri matematice, așa cum pot fi teoremele și conjecturile, dar spre deosebire de acestea nu au demonstrații și nici nu se caută una. Ele sunt admise ca fiind adevărate.

Elemente de matematică, lucrare scrisă în secolul al III-lea înaintea erei noastre de Euclid, constituie un ansamblu de treisprezece cărți care tratează, în principal, geometria și aritmetica.

Nu știm mare lucru despre Euclid, iar sursele cu privire la el sunt mult mai rare decât în cazul lui

Thales sau Pitagora. Este posibil să fi trăit în apropierea Alexandriei. Alte surse au vorbit, ca și în cazul lui Pitagora, despre posibilitatea să nu fi fost o singură persoană, ci numele unui colectiv de savanți. Nu se știe cu siguranță!

În ciuda puținelor informații pe care le avem despre el, Euclid ne-a lăsat odată cu *Elementele* o operă monumentală. Această lucrare este considerată în unanimitate unul dintre cele mai mari texte ale istoriei matematicii, pentru că a fost primul care a folosit o abordare de tip axiomatic. Construcția *Elementelor* este uimitor de modernă, iar structura sa este foarte apropiată de cea care este folosită astăzi de matematicienii zilelor noastre. La sfârșitul secolului al XV-lea, *Elementele* se vor număra printre primele lucrări tipărite de către Gutenberg. Opera lui Euclid constituie astăzi al doilea text care a avut parte de cele mai multe reeditări în istorie, imediat după Biblie.

În prima carte a *Elementelor*, care tratează geometria plană, Euclid enunță următoarele cinci axiome.

1. *Un segment de dreaptă poate fi trasat unind două puncte oarecare.*
2. *Un segment de dreaptă poate fi prelungit nedefinit în ambele părți.*
3. *Dat fiind un segment, este posibil să trasăm un cerc a cărui rază este acest segment și centrul îl reprezintă una dintre extremitățile segmentului.*
4. *Toate unghiurile drepte se pot suprapune.*
5. *Dacă două linii drepte sunt secante cu o a treia – astfel încât suma unghiurilor interioare unei laturi este mai*

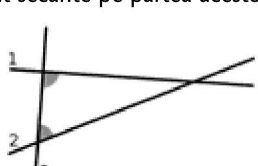
mică decât două unghiuri drepte –, atunci aceste două linii sunt secante pe aceeași parte.[1]

După acestea urmează o mulțime de teoreme impecabil demonstrate. Pentru fiecare dintre ele, Euclid nu utilizează nimic altceva în afara celor cinci axiome sau rezultatele pe care le-a stabilit în prealabil. Ultima teoremă a primei cărți este o cunoștință mai veche a noastră, deoarece este vorba despre teorema lui Pitagora.

După Euclid, numeroși matematicieni se vor apleca la rândul lor asupra chestiunii alegerii axiomelor. Mai exact, mulți au fost uimiți și deturnați de cea de-a cincea axiomă. Astfel, ultima este mult mai puțin elementară decât celelalte patru la un loc. Câteodată va fi înlocuită de un alt enunț, mai simplu, dar care ne permite să ajungem la aceeași concluzie: *Printr-un punct exterior unei drepte putem trasa o singură dreaptă paralelă la dreapta dată*. Dezbaterile în legătură cu alegerea celei de-a cincea axiome au durat până în secolul al XIX-lea, când s-a ajuns la crearea unor noi modele geometrice, în care această axiomă este una falsă!

---

[1] Această axiomă, în mod clar mult mai complexă decât celelalte patru, va provoca numeroase dezbateri între matematicieni. Pe figura de mai jos putem observa că suma celor două unghiuri indicate este mai mică decât două unghiuri drepte. Prin urmare dreptele 1 și 2 sunt secante pe partea acestor două unghiuri. *(N.a.)*



Enunțul axiomelor pune o altă problemă, anume aceea a definițiilor. Ce semnifică de fapt toate aceste cuvinte folosite, precum puncte, segmente, unghiuri sau cercuri? La fel ca în cazul demonstrațiilor, chestiunea definițiilor este fără sfârșit. Prima definiție enunțată trebuie să fie bine exprimată, folosind termeni care să nu fi fost definiți înainte. În *Elemente,* definițiile preced axiomele. Prima frază a primei cărți definește punctul.

Punctul este ceva ce nu are părți

Ei, poftim, descurcați-vă cu asta! Ceea ce dorește să spună Euclid prin această definiție este că punctul reprezintă cea mai mică figură geometrică posibilă. Este imposibil să facem puzzle-uri cu un punct. Nu poate fi tăiat și deci nu are părți. În 1632, în una dintre primele ediții în limba franceză a *Elementelor,* matematicianul Denis Henrion îmbogățește puțin definiția în comentariile sale, spunând că punctul nu are nici lungime, nici lățime, nici grosime.

Aceste definiții negative ne fac sceptici. A spune ce nu este un punct nu înseamnă a spune cu adevărat ceea ce este! Totuși cine ar putea să propună o definiție mai bună? În unele manuale școlare de la începutul secolului XX regăsim câteodată definiția următoare: *Un punct este urma lăsată de un creion fin ascuțit pe care îl sprijinim pe o foaie de hârtie.* Un creion bine ascuțit! De astă dată, iată-ne ancorați în concret. Totuși, definiția aceasta i-ar fi făcut pe Euclid, Pitagora și Thales să sară enervați, având în vedere că și-au bătut atât de mult capul să creeze figuri geometrice pentru obiectele abstracte și idealizate. Niciun creion,

oricât de bine ascuțit ar fi, nu ar putea să lase o urmă care să nu aibă nici lungime, nici lățime, nici grosime.

Pe scurt, nimeni nu știe cu adevărat să spună ce este un punct, dar toată lumea e aproape convinsă că ideea este suficient de simplă și clară pentru a nu genera ambiguități. Suntem cu toții aproape siguri că vorbim despre același lucru când utilizăm cuvântul *„punct"*.

Tocmai pe acest act de credință al primelor definiții și axiome se va construi întreaga geometrie. Și din lipsă de ceva mai bun, pe același model se va construi toată matematica modernă.

Definiții – Axiome – Teoreme – Demonstrații: iată calea indicată de Euclid, care determină ceea ce va deveni rutină pentru matematicienii care vor veni după el. Totuși, cu toate că teoriile se structurează și se amplifică, iată că alte pietricele se vor strecura în pantofii matematicienilor: paradoxurile.

Un paradox reprezintă un lucru care ar trebui să meargă, dar nu merge. Este o aparentă contradicție insolubilă. Este un raționament care pare perfect just, dar care ne conduce totuși spre un rezultat complet absurd. Imaginați-vă puțin că stabiliți o listă de axiome care vi se pare a fi incontestabilă și din care totuși deduceți teoreme care sunt în mod evident false. Ar fi un coșmar!

Unul dintre celebrele paradoxuri îi este atribuit lui Eubulide din Milet și privește vorbele enunțate de poetul Epimenide. Acesta din urmă ar fi spus într-o zi: „Cretanii sunt mincinoși". Problema este că Epimenide era el însuși cretan. Prin urmare, dacă este adevărat ceea ce

spune, atunci este un mincinos și deci ceea ce spune este fals. Iar dacă, din contră, propoziția sa este falsă, atunci el minte, dar propoziția spune adevărul. Mai multe variante ale acestui paradox vor apărea mai târziu, cel mai simplu dintre ele fiind acela când o persoană care declară: „Eu mint".

Paradoxul mincinosului readuce la lumină o idee preconceptă care susține că orice propoziție trebuie să fie adevărată sau falsă. Nu există o a treia posibilitate. În matematică, acest lucru poartă numele de principiul terțului exclus. La prima vedere ar fi foarte tentant să facem din acesta o axiomă. Totuși paradoxul mincinosului ne pune în gardă: situația este mult mai complexă decât atât! Dacă un enunț afirmă propria-i falsitate, atunci nu poate fi în mod logic nici adevărat, nici fals.

Această curiozitate nu-i va împiedica pe cei mai mulți matematicieni, până în zilele noastre, să considere ca adevărat terțul exclus. La urma urmei, paradoxul mincinosului nu este în mod real un enunț matematic și am putea să-l considerăm, cu atât mai mult, drept o incoerență de natură lingvistică decât o contradicție logică. Totuși, la mai mult de două mii de ani după Eubulide, logicienii vor descoperi că paradoxuri de același fel pot să apară în miezul celor mai riguroase teorii, generând o bulversare profundă a matematicii.

Zenon din Elea, care a trăit în secolul al V-lea înaintea erei noastre, trece și el drept unul dintre maeștrii în arta creării paradoxurilor. I se atribuie aproape zece paradoxuri. Unul dintre celebrele lui paradoxuri este acela cu Ahile și țestoasa.

Imaginați-vă un concurs de alergat între Ahile, care este un atlet deosebit, și o țestoasă. Pentru a echilibra șansele, acordăm țestoasei un anumit avans; să spunem, vreo sută de metri. În ciuda acestui avans, pare de la sine înțeles că Ahile, alergând mult mai repede decât țestoasa, va ajunge ca mai devreme sau mai târziu să o prindă din urmă. Totuși Zenon ne spune contrariul.

Să observăm concursul, ne spune el, ca împărțit în mai multe etape. Pentru a ajunge din urmă țestoasa, Ahile trebuie, cel puțin, să alerge cei o sută de metri care îl separă de aceasta. În timp ce el străbate această sută de metri, țestoasa va înainta și ea puțin și va rămâne așadar încă o mică distanță de parcurs pentru Ahile. Dar, după ce el a parcurs și această distanță, țestoasa între timp a mai avansat. Deci Ahile trebuie din nou să alerge o bucățică de drum la capătul căruia s-ar afla țestoasa, dar ea a mai înaintat deja între timp.

Pe scurt, de fiecare dată când Ahile atinge punctul precedent ocupat de țestoasă, aceasta a avansat puțin, și astfel niciodată nu poate fi ajunsă din urmă. Iar acest lucru rămâne adevărat indiferent de numărul de etape pe care îl luăm în considerare. Ahile pare condamnat să se apropie din ce în ce mai mult de țestoasă, fără a o putea depăși vreodată.

Absurd, nu-i așa? Este suficient să facem experiența pentru a constata că alergătorul va ajunge să depășească țestoasa foarte ușor. Totuși raționamentul pare să se susțină și pare greu să-i găsim vreo eroare logică.

Le va trebui mult timp matematicienilor pentru a înțelege acest paradox care se joacă abil cu infinitul.

Dacă cei care concurează aleargă în linie dreaptă, traiectoria lor poate fi asimilată cu ceea ce Euclid numește un segment. Un astfel de segment are o lungime finită, cu toate că este alcătuit dintr-o infinitate de puncte care au toate o lungime egală cu zero.

Într-un anumit sens, există, așadar, infinit în cadrul finitului. Paradoxul lui Zenon decupează intervalul temporal de care are nevoie Ahile să ajungă din urmă țestoasa într-o infinitate de intervale din ce în ce mai mici. Această infinitate de etape ține totuși foarte bine de un timp finit, iar acest lucru nu-l va împiedica cu nimic pe Ahile să ajungă din urmă țestoasa odată cu trecerea timpului.

Noțiunea de infinit în matematică va fi, fără îndoială, cea mai mare sursă de paradoxuri, dar și sursa celor mai fascinante teorii.

De-a lungul istoriei, matematicienii vor avea o relație ambiguă cu paradoxurile. Pe de o parte, acestea reprezintă cel mai mare pericol. Dacă se arată într-o zi că o teorie se întemeiază pe un paradox, atunci tot fundamentul său și deci toate teoremele pe care credeam că le-am construit pe aceste axiome se vor nărui. Dar, pe de altă parte, ce provocare!

Paradoxurile sunt o sursă foarte prolifică și emoționantă de punere sub semnul întrebării. Dacă avem un paradox, atunci ceva ne-a scăpat din vedere. Înseamnă că am înțeles greșit o noțiune, am dat o definiție proastă sau am ales o axiomă în mod greșit. Înseamnă că am luat un lucru drept o evidență, deși se dovedește că nu e chiar așa. Paradoxurile reprezintă o invitație la

aventură, o invitație la a regândi în profunzime lucrurile pe care le considerăm a fi evidente. Oare pe lângă câte idei noi și teorii originale am fi trecut, dacă nu ar fi existat paradoxurile să ne împingă către acestea?

Paradoxurile lui Zenon vor inspira noi concepții despre infinit și măsură. Paradoxul mincinosului îi va angaja pe logicieni într-o căutare din ce în ce mai rafinată a noțiunilor de adevăr și de demonstrabilitate. Chiar și astăzi, numeroși cercetători disecă matematica aflată deja în germene în paradoxurile savanților greci.

În 1924, matematicienii Stefan Banach și Alfred Tarski au adus la lumina zilei un paradox care le poartă astăzi numele și care repune în discuție însuși principiul puzzle-ului. Oricât de evident ar putea să ne pară, acest principiu eșuează. Banach și Tarski au fost capabili să descrie un puzzle în trei dimensiuni, al cărui volum nu este același în funcție de modul în care îmbinăm piesele. Vom reveni asupra acestui aspect. Piesele pe care ei le vor imagina sunt atât de stranii și de uimitoare, încât nu au nimic de-a face cu figurile geometrice pe care le manipulau geometrii greci. Stați liniștiți, principiul puzzle-ului rămâne valabil atâta timp cât piesele au formă de triunghi, de pătrat sau alte figuri clasice. Dovada lui Liu Hui asupra teoremei lui Pitagora rămâne valabilă în continuare.

Dar fie ca acest lucru să ne fie învățătură de minte! Să avem grijă cu evidențele și să ne lăsăm uimiți și surprinși de misterele acestei lumi matematice pe care savanții greci au deschis-o pentru noi.

6

De la π la și mai și

Pe 14 martie 2015 am mers la *Palais de la Découverte*. Era o zi de mare sărbătoare.

La începutul anilor 1930, fizicianul francez care a câștigat Premiul Nobel, Jean Perrin, își imaginează proiectul unui centru științific destinat trezirii interesului marelui public pentru descoperirile și cercetările din toate domeniile științei. *Palais de la Découverte* își deschide porțile în 1937, la doi pași de Champs-Élysées, unde se amenajează în acest sens întreaga aripă vestică a marelui palat pe douăzeci și cinci de mii de metri pătrați. Expozițiile, care nu ar fi trebuit să dureze decât șase luni, au cunoscut un asemenea succes încât, începând cu 1938, temporarul se transformă în permanent. La optzeci de ani după deschiderea acestuia, clădirea primește în fiecare an multe sute de mii de vizitatori.

Ieșind de la metrou, merg pe șoseaua Franklin–D.–Roosevelt spre intrarea palatului. Ajung la scările de pe peron și un detaliu îmi atrage atenția: 4, 2, 0, 1, 9, 8, 9. Este o stranie procesiune de cifre imprimate, care se ondulează pe sol și urcă scările, părând că se strecoară până în interiorul clădirii. Iată un lucru neobișnuit! Ultima oară când am trecut pe aici, cifrele acestea nu erau. Urmez

calea lor: 1, 3, 0, 0, 1, 9. Intru în palat. Șirul continuă și aici: 1, 7, 1, 2, 2, 6. Acestea traversează rotonda centrală și o iau spre scara principală: 7, 6, 6, 9, 1, 4. Urc scările patru câte patru, trec prin fața intrării de la Planetariu și o iau la stânga: 5, 0, 2, 4, 4, 5. Cifrele mă conduc drept spre departamentul de matematică. Le văd înfășurându-se, părăsind solul și urcând de-a lungul zidului: 5, 1, 8, 7, 0, 7. În sfârșit, iată-le ajunse la punctul lor de plecare. Mă aflu în inima unei mari încăperi circulare, unde cifrele roșii și negre au crescut, de asemenea, în mărime, aflându-se într-un vârtej care se înalță din ce în ce mai sus. În sfârșit, privirea îmi este captată de începutul seriei: 3, 1, 4, 1, 5... Mă găsesc în inima unuia dintre locurile emblematice ale palatului. Este vorba despre sala π.

Fără nicio îndoială că numărul π este celebru și cel mai fascinant dintre constantele matematice. Forma circulară a sălii îmi aduce aminte că valoarea lui este strâns legată de geometria cercului; este vorba de numărul prin care trebuie să multiplicăm diametrul unui cerc pentru a-i găsi perimetrul. Litera π (se citește pi) este de altfel cea de-a șaisprezecea literă a alfabetului grecesc, echivalentul „p"-ului din alfabetul latin și inițiala cuvântului perimetru. Numărul π nu este foarte mare, abia dacă depășește puțin cifra 3, dar suita sa de zecimale este infinită: 3,14159265358979...

În mod obișnuit, doar primele 704 zecimale ale numărului sunt văzute de vizitatori înfășurându-se pe pereții rotunjiți ai sălii π. Dar astăzi, cifrele au părăsit sala, au invadat Parisul și se etalează până în stradă. Acum vedem mai mult de 1 000 de zecimale. Trebuie să spunem că

data este memorabilă; adică 14 martie 2015 este ziua π a secolului.

Prima ediție a lui „π Day" a avut loc pe 14 martie 1988 la *Exploratorium*, ruda americană a lui *Palais de la Découverte*, aflată în inima orașului San Francisco. A paisprezecea zi a celei de-a treia luni, adică 3/14 (în notația americană luna precede ziua), era o dată bine aleasă pentru a-l celebra pe π, a cărui valoare 3,14 este aproximarea obișnuită, cu două cifre după virgulă. De atunci inițiativa a căpătat adepți, iar numeroși pasionați din întreaga lume se întâlnesc în fiecare an pentru a sărbători constanta și, prin ea, întreaga matematică. Sărbătoarea a ajuns la o atât de mare amploare în 2009, încât „π Day" a fost recunoscută oficial de Camera Reprezentanților din Statele Unite.

În acest an, 2015, *aficionados*[1] ai lui π au așteptat ziua cu o și mai mare nerăbdare. Suntem la data de 3/14/15, adică se adaugă încă două cifre la coincidența datei și a constantei. Această ediție trebuie să fie măreață! Cu această ocazie, întreaga echipă de matematicieni de la *Palais de la Découverte* se află pe pod. Iată de ce mă aflu și eu aici: împreună cu alți câțiva matematicieni, am venit să ne aducem contribuția la o zi bogată în experiențe matematice.

Dacă numărul π vine pe linie geometrică, el s-a răspândit treptat în cea mai mare parte a ramurilor matematicii. Este un număr care are multiple fețe. În aritmetică, în algebră, în analiză, în probabilități, rari sunt matematicienii, oricare ar fi disciplinele acestora, care nu au avut

[1] Fani – în spaniolă. *(N.t.)*

niciodată de-a face cu π. În inima palatului, rotonda freamătă de animații care îi prezintă multiplele aspecte. Aici vizitatorii sunt invitați să numere boldurile aruncate în mod aleatoriu pe parchet, dincolo pot observa proporția numerelor care apar în tabelele de înmulțire. Pe jos, copiii acoperă suprafața unui disc cu scândurele din lemn. Un alt grup se ocupă cu studiul traiectoriei unui punct fixat pe o roată care se rostogolește pe un plan înclinat. Toți ajung la același rezultat: 3,1415...

Puțin mai încolo, un program informatic propune vizitatorilor să caute primele apariții ale datelor lor de naștere în suita de zecimale de după virgulă. Un tânăr își încearcă norocul; este născut la 25 septembrie 1994. Rezultatul nu întârzie să apară, căci secvența 25091994 apare în numărul π începând cu cea de-a 12785022-a zecimală.

Matematicienii au emis ipoteza („au conjecturat") că toate secvențele de cifre, oricât de lungi ar fi, apar la un moment dat în zecimalele lui π. Simulările informatice par să confirme acest lucru. Până în acest moment, toate secvențele care au fost căutate s-au regăsit. Totuși nimeni până acum nu a știut să facă o demonstrație incontestabilă care să probeze că așa vor sta lucrurile pentru orice situație am alege.

Iată că o fetiță de doisprezece ani se apropie de mine. Pare uimită de instrumentele amuzante care ne înconjoară și-mi aruncă o privire întrebătoare.

— Te întrebi ce e cu toate astea, nu-i așa? Ai auzit deja vorbindu-se de numărul π?

— Desigur, exclamă ea. Este 3,14. De fapt, nu... este aproape 3,14... Am văzut asta la școală. Ajută să calculăm perimetrul unui cerc. Am învățat și poezia.

— Poezia?

Ea își mijește ochii ca și cum ar căuta prin memorie, apoi începe să recite.

Que j'aime à faire apprendre ce nombre utile aux sages
Immortel Archimède, artiste, ingénieur,
Qui de ton jugement peut priser la valeur?
Pour moi ton problème eut de pareils avantages.[1]

Zâmbesc, ascultând această poezioară pe care am învățat-o și eu când aveam vârsta ei. O uitasem. Mecanismul său este foarte ingenios: pentru a reconstitui numărul π, este suficient să aflăm numărul de litere din fiecare cuvânt. *Que = 3; j = 1; aime = 4* și așa mai departe. Poezia cunoaște multe variante în diferite limbi. Una dintre versiunile cele mai cunoscute în engleză este o adaptare a unui poem de Edgar Allan Poe și ne permite să găsim 740 de zecimale.[2]

---

1 *Ce-mi mai place să învăț acest număr util înțelepților*
Nemuritor Arhimede, artist, inginer
Cine ar putea, după părerea ta, să-i înțeleagă valoarea?
Pentru mine, problema ta a avut un sens.
În românește, desigur, nu se mai respectă regula pe care autorul o expune câteva rânduri mai jos. *(N.t.)*

2 Poemul *The Raven (Corbul)*, scris de Edgar Allan Poe în 1845, a fost adaptat în 1995 de Michael Keith sub numele de *Near a Raven* pentru a suda constanta matematică. Începe astfel: *Poe E. // Near a Raven. // Midnights so dreary, tired and weary. Silently pondering volumes extolling all by-now obsolete lore. (N.a.)*

— Bravo! o felicit eu. Cred că nu mi-aș fi adus aminte de ea la fel de bine ca tine. Dar ia spune-mi, vorbeai de Arhimede în poezia ta, știi cine a fost?

Se pare că am pus-o în încurcătură. Fetița face o grimasă în timp ce ridică din umeri. Se impune să-i aduc aminte cum stau lucrurile. Desenez un cerc mare, care se decupează într-o mulțime de triunghiuri ce se intersectează. Ne luăm zborul spre Sicilia! În urmă cu două mii trei sute de ani, în cetatea antică a Syracuzei. Aici ne așteaptă Arhimede.

Cicadele zumzăie sub razele unui soare apăsător. Străzile sunt pline de parfumuri care vin din cele patru zări ale Mediteranei. Măsline, pești sau struguri se amestecă pe tarabele vânzătorilor. În nordul orașului, silueta impozantă a vulcanului Etna se vede la orizont. La vest, câmpiile fertile asigură prosperitatea coloniei, în timp ce la est portul dublu se deschide spre mare. Syracuza și-a făurit renumele și puterea impunându-se ca unul dintre nodurile maritime cele mai importante ale regiunii. A fost fondată cu cinci secole înainte de către coloniștii greci din Corint. Cetatea este una dintre cele mai înfloritoare din întreaga periferie mediteraneeană.

Aici va lua naștere, în -287, un om ale cărui geniu și inventivitate vor inaugura un nou stil în matematică: Arhimede are calibrul marilor inventatori, al celor care rezolvă probleme, al celor capabili de idei cu adevărat noi și revoluționare. Lui i se datorează principiul pârghiei și cel al șurubului. El este cel care, conform legendei, a strigat *Evrika!* atunci când era în baie, în momentul în care i-a venit în minte principiul fizic care îi poartă astăzi numele: *Orice corp scufundat într-un lichid este împins în*

sus de o forță având o intensitate egală cu cea a greutății lichidului dislocat. Așa se explică faptul că obiectele mai ușoare decât apa plutesc, iar cele mai grele se scufundă. Se mai povestește și că, într-o zi în care Syracuza era asaltată de flota romană, Arhimede a inventat un sistem de oglinzi care au concentrat razele soarelui în așa fel încât navele dușmanilor au luat foc.

În matematică, lui Arhimede i se datorează primele mari descoperiri în legătură cu numărul π. Înaintea lui, și alții s-au interesat de cerc, dar adesea acestora le lipsea rigoarea. Aduceți-vă aminte de cele *Nouă capitole* chinezești: se trasau câmpuri circulare cu 10 bu diametru și o circumferință de 30 bu. De fapt, asemenea date spuneau că numărul π este egal cu 3. În papirusul lui Ahmes, rezolvarea aproximativă a cvadraturii cercului lua în considerare valoarea lui π ca fiind 3,16.

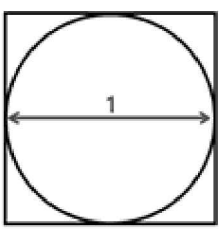
În ceea ce-l privește pe Arhimede, acesta înțelege că e greu, chiar imposibil să calculăm o valoare exactă a lui π. Și el se va mulțumi cu aproximări ale lui, dar abordarea sa se distinge prin două aspecte: în primul rând, prin faptul că, acolo unde predecesorii lui gândeau că dețineau o metodă exactă, savantul sicilian era conștient că nu putem avea decât valori apropiate; în al doilea rând, el va face o estimare a diferențelor dintre aproximații și adevărata valoare a lui π, după care va dezvolta metode care să permită reducerea din ce în ce mai mult a acestei diferențe.

În urma calculelor, el ajunge la concluzia că valoarea pe care o caută se află între două numere care, așa cum sunt scrise în sistemul nostru zecimal actual, sunt în jur

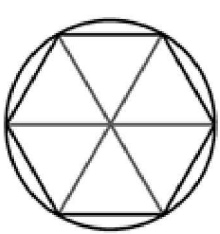
de 3,1408 și 3,1428. Pe scurt, Arhimede va cunoaște de acum încolo numărul π, cu o eroare de 0,03%.

Metoda lui Arhimede

Pentru a calcula încadrarea lui π, Arhimede a aproximat cercul prin poligoane regulate. Să luăm, de exemplu, un cerc al cărui diametru măsoară o unitate, iar perimetrul măsoară π unități, după care să-l încadrăm într-un pătrat.

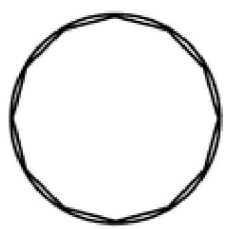


Pătratul are o latură egală cu 1 (precum diametrul cercului) și deci un perimetru egal cu 4. Cum perimetrul cercului este mai mic decât acela al pătratului, deducem că π este mai mic decât 4.
Dacă, din contră, înscrieți un hexagon în cerc, așa cum vedem mai jos,

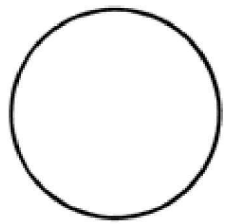


hexagonul este compus din șase triunghiuri echilaterale ale căror laturi măsoară 0,5 unități (jumătate din diametrul cercului). Perimetrul hexagonului măsoară deci 6 x 0,5 = 3. Ajungem la concluzia că π este mai mare decât 3.

Bun! Până aici nimic nu-i palpitant, încadrarea între 3 și 4 rămâne foarte imprecisă. Pentru a restrânge intervalul, este nevoie acum să mărim numărul de laturi ale poligonului. Dacă divizăm fiecare latură a hexagonului în două, obținem o figură cu 12 laturi, care se apropie și mai mult de cerc.



După câteva calcule geometrice plictisitoare (în principal bazându-ne pe teorema lui Pitagora), ajungem la concluzia că perimetrul dodecagonului măsoară în jur de 3,11. Numărul π este, așadar, mai mare decât această valoare.
Pentru a obține o încadrare cu o aproximație de 0,001, Arhimede a repetat această operație de trei ori. Divizând fiecare dintre laturi în două, s-au obținut 24, apoi 48 și, în final, s-a ajuns la un poligon cu 96 de laturi.



Mai vedeți poligonul? Normal că nu, laturile se lipesc acum atât de bine de cerc, încât este aproape imposibil să-l deosebim cu ochiul liber. Iată cum a ajuns Arhimede la concluzia ca π este mai mare decât 3,1408! Şi refăcând acest proces cu poligoane exterioare cercului, a obținut π mai mic de 3,1428. Ceea ce dă rigoare metodei lui Arhimede nu constă numai în rezultatul său, ci și în faptul că acesta se prelungește. Ar fi nevoie să continuăm să subdivizăm poligoanele pentru a rafina din ce în ce mai mult încadrarea noastră. În teorie este, așadar, posibil să obținem o aproximație a numărului π oricât de precisă am dori-o, totul depinde de curajul pe care îl avem pentru a ne lansa în calcule.

În anul -212, trupele romane reușesc în cele din urmă să intre în Syracuza, iar generalul Marcus Claudius Marcellus care a condus asediul orașului ordonă soldaților săi să-l salveze pe Arhimede, care avea la vremea aceea 75 de ani. În timp ce orașul era pe cale să fie cucerit, savantul grec era absorbit de studiul unei probleme de geometrie și nu-și dădea seama de nimic din ce se întâmpla în jurul său. Când un soldat roman trece pe

lângă Arhimede care desena figuri pe pământ, el îi spune distrat: „Nu-mi deranja cercurile!“ Soldatul, jignit, își înfige sabia în el, omorându-l.

Generalul Marcellus i-a făcut un mormânt măreț, având pe soclu o sferă înscrisă într-un cilindru, drept simbol pentru una dintre cele mai remarcabile teoreme ale sale. Niciodată, de-a lungul celor șapte secole care vor urma, Imperiul Roman nu va mai da naștere vreunui matematician de talia lui Arhimede.

În ceea ce privește matematica, Antichitatea se va stinge încet. Imperiul Roman se va extinde în curând în jurul bazinului mediteraneean, iar identitatea greacă se va dizolva în această nouă cultură. Totuși un oraș va continua să țină în viață pentru alte câteva secole spiritul matematicienilor greci: Alexandria.

În cursul cuceririlor sale, Alexandru cel Mare a pus stăpânire pe Egipt la sfârșitul anului –332. Rămâne aici doar câteva luni, adică timpul necesar pentru a se proclama Faraon al Memphisului și pentru a decide în legătură cu fondarea unui nou oraș pe coasta mediteraneeană. Alexandru nu va vedea niciodată orașul căruia i-a dat numele său. După ce a murit, opt ani mai târziu, în Babilon, regatul său a fost împărțit între generalii lui, iar Egiptul i-a revenit lui Ptolemeu I, care va face din Alexandria capitala sa. Sub domnia lui, orașul Alexandria va deveni una dintre cetățile cele mai înfloritoare din întregul bazin mediteraneean.

Ptolemeu va continua marile lucrări inițiate de Alexandru. În vârful insulei Pharos, care se află în fața orașului, el începe construcția unui far monumental.

Nu trebuie să treacă mult timp pentru ca autorii greci să recunoască în Farul din Alexandria un monument cu adevărat excepțional și să facă din el cel de-al șaptelea și ultimul element din lista foarte scurtă a Minunilor Lumii.

Să ne oprim câteva momente pentru a profita de panorama extraordinară care se deschide în fața ochilor călătorului care a avut curajul să urce sutele de trepte ale scării spiralate ce duce spre vârful farului. Priviți spre nord! Marea Mediterană se întinde până la orizont. De aici puteți vedea vasele comerciale care sosesc și pot fi observate de la mai mult de cincizeci de kilometri. Iată unul care trece prin fața dumneavoastră și intră în port cu cala plină de mărfuri. Poate că vine de la Atena, de la Syracuza sau chiar de la Massalia, această cetate dinamică din sudul Galiei, pe care o vom numi într-o zi Marsilia. Dacă vă întoarceți privirea spre sud, veți vedea Delta Nilului. La cinci kilometri de aici veți observa o întindere de apă sărată care traversează delta. Este vorba despre lacul Mareotis. Între lac și mare, pe această bandă largă de pământ, Alexandria își etalează splendorile. Este un oraș nou și modern. Ici, colo puteți să mai vedeți câteva șantiere în lucru.

Pe insula Pharos farul nu este singurul care captează atenția. Aici se mai găsește și templul lui Isis. Pentru a ajunge la el, alexandrinii trebuie să meargă pe heptastadium, un dig lung de 1 300 de metri care separă portul în două bazine independente. Din înaltul farului puteți să vedeți siluetele minuscule ale trecătorilor care se plimbă.

Cei care revin spre continent ajung în cartierul regal, unde se găsesc palatul lui Ptolemeu, teatrul și templul lui Poseidon. Puțin mai spre vest, o clădire impunătoare atrage în mod deosebit atenția: Mouseion. Spre acest loc ne îndreptăm în prezent.

Cu acest mare muzeu, destinat să păstreze moștenirea culturii grecești, Ptolemeu vrea să facă din Alexandria un mare centru cultural, capabil să rivalizeze cu Atena. Așadar, nu se va zgârci în a investi în acest sens. Oamenii de știință care stau la Mouseion sunt răsfățați: sunt cazați, hrăniți și plătiți pentru a-și continua cercetările. Regele pune la dispoziția acestora și o bibliotecă imensă, legendara Bibliotecă a Alexandriei! Poate că mai mult decât oamenii de știință care s-au perindat pe aici, această bibliotecă va contribui la renumele și prestigiul Mouseionului.

Pentru a umple biblioteca, strategia lui Ptolemeu este simplă: toate vasele care fac escală la Alexandria trebuie să predea cărțile pe care le transportă. Apoi cărțile sunt copiate, iar copia este redată vasului. În ceea ce privește originalul, acesta merge direct în colecțiile bibliotecii. Mai târziu, Ptolemeu al II-lea, fiul și succesorul primului, va lansa un apel tuturor regilor lumii, ca aceștia să-i trimită volume faimoase din țările lor. La deschidere, Biblioteca din Alexandria număra aproape 400 000 de volume. În viitor va reuși să strângă până la 700 000 de exemplare.

Planul lui Ptolemeu va funcționa de minune și, de-a lungul a mai mult de șapte secole, savanții se vor perinda prin Alexandria, unde mediul intelectual își va păstra vitalitatea care lipsea în restul lumii mediteraneene.

Printre celebrii rezidenți ai Mouseionului s-a aflat și Eratostene din Cyrene, care a fost, dacă vă mai aduceți aminte, primul care a măsurat cu precizie circumferința Pământului. Tot aici Euclid și-ar fi redactat cea mai mare parte din opera sa *Elemente de matematică*. Un anume Diophante va scrie aici o lucrare vestită despre ecuațiile care vor căpăta mai târziu numele său. În secolul al II-lea al erei noastre, tot în Alexandria, Claudius Ptolemeu (care nu are nimic în comun cu primul) va redacta *Almageste*, o lucrare adunând un număr mare dintre cunoștințele de matematică și astronomie care circulau în epoca sa. Cu toate că Ptolemeu spune în această carte că Soarele se învârtește în jurul Pământului, *Almageste* va rămâne o operă de referință până în momentul în care Copernic își va aduce contribuția în secolul al XVI-lea.

Dar Alexandria nu are numai oameni de știință care scriu și produc noi cunoștințe. Aici există o întreagă comunitate de copiști, traducători, comentatori de lucrări și editori, care s-a format în jurul Mouseionului. Orașul freamătă datorită acestora.

Dar iată că în secolul al IV-lea vremurile se tulbură. La 16 iunie 391, era noastră, împăratul Teodosie I, dorind să accelereze convertirea imperiului la religia creștină, publică un edict care interzice toate cultele păgâne. Mouseion, cu toate că nu este în adevăratul sens al cuvântului un templu, este afectat de decizia împăratului și închis împreună cu toate celelalte.

În această epocă, una dintre figurile mediului intelectual al Alexandriei este Hypatia. Tatăl ei, Theon,

era directorul Mouseionului în momentul în care a fost închis, lucru care nu i-a împiedicat totuși pe oamenii de știință ai orașului să-și continue redactarea lucrărilor pentru încă puțin timp. Socrate Scolasticul va scrie mai târziu că nenumărate persoane se alăturau mulțimii pentru a o asculta vorbind pe Hypatia, care îi depășea prin știința sa pe toți oamenii timpului său. Hypatia este matematician și filosof. Ea este totodată și prima femeie din istoria matematicii.

Prima? Nu prea. Și alte femei au făcut matematică înaintea Hypatiei, fără ca operele sau biografia acestora să fi ajuns până la noi. În școala lui Pitagora femeile erau admise. Numele multora dintre ele, precum Theano, Autocharidas sau Habroteleia, ne sunt cunoscute astăzi, dar trebuie să recunoaștem că nu știm aproape nimic despre ele.

Niciun text scris de Hypatia nu ne-a parvenit, dar mai multe surse menționează lucrările sale. Ea se va interesa în special de aritmetică, geometrie și astronomie. Va adăuga lucruri noi în mod deosebit la operele începute câteva secole mai devreme de Diophante și Ptolemeu. Hypatia este și o inventatoare prolifică. Ei îi datorăm inventarea hidrometrului — care ne permite să măsurăm densitatea unui fluid profitând în mod inteligent de principiul lui Arhimede —, precum și a unui nou model de astrolab care facilitează măsurătorile astronomice.

Din păcate, povestea sa se va sfârși repede. În 415 ea va fi ținta mâniei creștinilor din oraș, care o urmăresc și o omoară. Corpul său este tăiat în bucăți și apoi ars.

După închiderea Mouseionului și moartea Hypatiei, flacăra științifică a Alexandriei se va stinge foarte repede.

Nici colecțiile bibliotecii nu vor scăpa: vor exista incendii, revolte, valuri de maree și cutremure care vor scutura orașul și, cu toate că nu știm cu precizie când și cum a dispărut Biblioteca din Alexandria, știm sigur că în secolul al VII-lea nu va mai exista nimic din ea.

O epocă se încheie. Totuși, istoria are căi ocolitoare și matematicienii greci își vor găsi în curând cărări pentru a ajunge până la noi.

7

Nimic și mai puțin decât nimic

Din înaltul celor 6 714 metri cât măsoară în altitudine, muntele Kailash din Tibet face parte din cercul restrâns de vârfuri care nu au fost niciodată atinse de piciorul lui *Homo sapiens*. Silueta sa rotunjită, brăzdată de zăpadă pe fondul gri al granitului, se detașează masiv deasupra peisajului decupat al vestului himalayan. Pentru locuitorii din regiune, fie ei hinduși sau budiști, muntele este sacru și poartă cu sine o mulțime de mituri ancestrale și povești minunate. Se spune chiar că ar fi vorba despre legendarul munte Meru, despre care mitologiile locale pretind că reprezintă centrul Universului.

Aici se ascunde izvorul unuia dintre cele șapte râuri sacre ale regiunii: Indusul.

Ieșind de pe pantele muntelui Kailash, Indusul ia direcția estică, își sapă rapid în zigzag o cale care străbate munții Cașmirului, apoi începe să coboare lent spre sud. Aici traversează câmpiile Pendjabului și Sindului din actualul Pakistan, înainte de a se vărsa, printr-o deltă, în Marea Arabiei. Valea Indusului este fertilă. În Antichitate, regiunea era acoperită de foșnetul și bogăția pădurilor. Elefanții Asiei stau alături de rinoceri, tigri de Bengal, maimuțe de toate felurile și șerpi ce vor încerca în curând să-și farmece îmblânzitorii care le cântă din fluier.

Aproape că ne-am aștepta să-l întâlnim, la o cotitură de cărare, pe Mowgli, băiețelul ieșit din *Cartea Junglei,* ale cărui aventuri umplu aceste decoruri. Aici va lua naștere o civilizație originală și rezervată, în care matematicienii vor juca un rol determinant la începutul Evului Mediu.

Încă din mileniul al III-lea înaintea erei noastre, se dezvoltă câteva orașe importante în jurul fluviului, precum Mohenjo-Daro sau Harappa. Văzute de departe, aceste cetăți construite din cărămizi de argilă seamănă întru câtva cu contemporanele lor din Mesopotamia. În al II-lea mileniu începe epoca vedică. Regiunea este împărțită într-o multitudine de mici regate care se înmulțesc până pe malurile Gangelui. Hinduismul se naște, se dezvoltă și apar primele mari texte în sanscrită. În secolul al IV-lea înaintea erei noastre, Alexandru cel Mare ajunge până pe malurile Indusului și fondează două orașe care vor căpăta numele de Alexandria, fără ca acestea să cunoască totuși destinul extraordinar al fratelui lor egiptean. O parte din cultura grecească se integrează în India. Urmează epoca marilor imperii. Maurya domnesc pe aproape toată întinderea subcontinentului indian timp de mai mult de un secol. După Maurya, o mulțime de dinastii se vor succede și vor coexista mai mult sau mai puțin pașnic până la cucerirea musulmană din secolul al VIII-lea.

De-a lungul secolelor, indienii fac o matematică despre care, din păcate, nu știm mare lucru. Cauza acestei necunoașteri este simplă: oamenii lor de știință au dezvoltat încă de la începuturile epocii vedice un ideal de transmitere orală a cunoștințelor care respinge în

principiu punerea lor în scris. Cunoștințele trebuie să fie asimilate prin viu grai, din generație în generație, de la maestru la discipol. Textele sunt învățate pe de rost, sub formă de poeme sau însoțite de artificii mnemotehnice, apoi recitate și repetate de câte ori este nevoie până la a fi perfect stăpânite. Găsim când și când câteva excepții de la regulă, adică fragmente scrise care ne-au parvenit, deși recolta este foarte slabă.

Cu toate acestea, ei fac matematică! Cum am putea altfel să explicăm bogăția de concepte pe care ne-o vor oferi începând cu secolul al V-lea, când ei decid, în sfârșit, să pună în scris cunoștințele acumulate oral de-a lungul secolelor? India va cunoaște de acum încolo o epocă de aur a științei care în curând se va răspândi în întreaga lume.

Oamenii de știință indieni încep să scrie lungi tratate, preluând cunoștințele ancestrale pe care le completează cu propriile descoperiri. Printre cei mai cunoscuți se numără Aryabhata, care se va interesa de astronomie și va calcula destul de precis numărul π, Varahamihira, care a adăugat noi descoperiri în trigonometrie, sau Bh skara, primul care l-a scris pe zero sub forma unui cerc și a utilizat în mod științific sistemul zecimal de care ne servim până în ziua de azi. Ei bine, cele zece cifre ale noastre — 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 și 9 —, pe care le numim de obicei cifre arabe, sunt în realitate indiene!

Totuși, dacă dintre toți savanții indieni din această epocă ar trebui să alegem unul singur, atunci fără îndoială că istoria l-ar alege pe Brahmagupta. Acesta a trăit

în secolul al VII-lea și a fost directorul Observatorului din Ujjain. În această epocă, orașul Ujjain, situat pe malul drept al râului Shipra, în centrul Indiei actuale, este unul dintre cele mai mari centre științifice ale țării. Observatorul său astronomic și-a câștigat reputația, iar orașul îi era deja cunoscut lui Claudius Ptolemeu în perioada de glorie a Alexandriei.

În 628, Brahamagupta publică opera sa majoră – *Br hmasphu asiddh nta.* În acest text se află prima descriere completă a lui zero și a numerelor negative, însoțită de proprietățile lor aritmetice.

În zilele noastre, zero și numerele negative au devenit atât de omniprezente în viața cotidiană — pentru măsurarea temperaturii, altitudinea în raport cu nivelul mării sau soldul contului nostru din bancă —, încât am ajuns aproape să uităm cât de geniale sunt aceste idei. Inventarea lor a fost un exercițiu de acrobație cerebrală rar întâlnit, iar oamenii de știință indieni au fost primii care l-au dus la perfecțiune. A înțelege acest proces în tot ceea ce are el mai subtil și puternic reprezintă un deliciu intelectual asupra căruia trebuie să ne oprim puțin, dacă dorim să pătrundem adânc în răsturnările pe care le va cunoaște matematica în secolele ce vor urma.

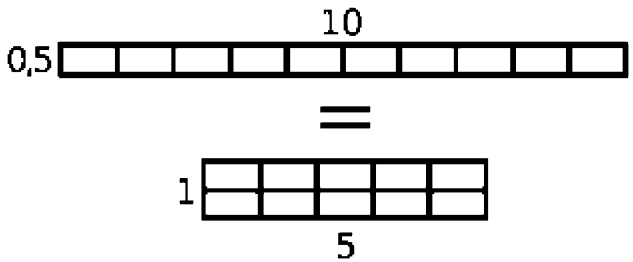
Una dintre întrebările care mi se pun adesea atunci când îmi exprim în public preferințele pentru matematică este cea cu privire la originea acestei pasiuni. *Cum de aveți această preferință care este cel puțin bizară?* sunt întrebat câteodată. Există vreun profesor anume care v-a stârnit pasiunea pentru matematică? Vă plăcea de când erați copil? Modul în care a fost declanșată o asemenea vocație îi face

curioși pe cei care până la momentul respectiv rămăseseră închiși față de această disciplină.

Ca să fiu sincer, trebuie să mărturisesc că habar nu am. După câte îmi aduc aminte, mi-a plăcut matematica dintotdeauna, fără să pot identifica un anume eveniment petrecut în viața mea care m-ar fi condus pe calea aceasta. Totuși, dacă răscolesc mai atent în memorie, îmi revin unele amintiri cu privire la bucuria intensă care mă cuprindea când noi idei îmi apăreau dintr-odată în minte. Așa a fost cazul când am descoperit o proprietate uimitoare a înmulțirii.

Cred că aveam nouă sau zece ani când, tastând la întâmplare pe calculatorul meu de elev, am descoperit un rezultat straniu: 10 x 0,5 = 5. Înmulțiți numărul 10 cu 0,5 și veți obține 5! Ia uite ce îndrăznea să pretindă calculatorul meu în care până atunci avusesem o încredere oarbă! Cum este posibil ca înmulțind un număr cu ceva să putem obține un altul care este mai mic decât acesta? O înmulțire nu presupune să creștem cantitatea căreia i se aplică? Nu acesta este sensul cuvântului „a înmulți"? Calculatorul meu drag n-ar fi făcut mai bine să-mi afișeze un număr mai mare decât 10?

Mi-a trebuit un timp, chiar mai multe săptămâni, în care m-am gândit adesea la acest rezultat înainte de a reuși să-mi clarific gândurile. Declicul final a venit în ziua în care m-am gândit să-mi reprezint înmulțirea într-o manieră geometrică, mergând astfel, fără să știu, pe urmele gânditorilor antici. Luați un dreptunghi a cărui lungime măsoară 10 unități, iar lățimea 0,5. Suprafața sa ne va indica 5 pătrățele cu latura de 1.



Cu alte cuvinte, a înmulți ceva cu 0,5 înseamnă să împarți la 2. Și același principiu se aplică și cu alte numere. Să înmulțim ceva cu 0,25 înseamnă să împărțim la 4; să înmulțim cu 0,1 înseamnă să împărțim la 10 și așa mai departe.

Explicația este convingătoare, dar concluzia are ceva în ea care ne derutează: cuvântul „înmulțire" nu înseamnă exact același lucru atunci când îl aplicăm în matematică sau în limbajul cotidian. Desigur că în viața de toate zilele nu putem pretinde că am înmulțit suprafața grădinii noastre după ce am vândut jumătate din ea. Cine ar spune, oare, că veniturile sale s-au multiplicat după ce a pierdut 50% din ele? Procedând astfel, înmulțirea pâinilor devine un miracol pe care oricine îl poate realiza: mâncați jumătate din ele și magia s-a produs.

Aceste reflecții ne gâdilă spiritul atunci când le descoperim pentru prima oară. Au în ele ceva delicios, care ne deranjează și ne sună în minte precum un joc de cuvinte foarte reușit. În tot cazul, ăsta era efectul pe care îl produceau aceste descoperiri curioase asupra copilului care eram. Această stranietate mi-a apărut cu atât

mai clară atunci când, cu mulți ani mai târziu, am citit un text al matematicianului Henri Poincaré, *Știință și metodă*, apărut în 1908, unde am găsit următoarea propoziție: „Matematica este arta de a da același nume unor lucruri diferite".

Ca să fiu cinstit, trebuie să recunosc că această propoziție poate să se aplice fără îndoială oricărui alt limbaj. Cuvântul „fruct" desemnează lucruri atât de diferite precum merele, cireșele sau tomatele. Fiecare dintre aceste cuvinte regrupează la rândul său o multitudine de varietăți diferite care ele însele vor genera cele mai subtile categorii în momentul în care ne lansăm într-o analiză botanică suficient de minuțioasă. Totuși Poincaré subliniază pe bună dreptate că niciun alt limbaj în afară de cel matematic nu merge atât de departe în acest proces de regrupare. Matematica ne permite apropieri pe care niciun alt limbaj nu le aprobă. Pentru matematicieni, înmulțirea și împărțirea nu sunt altceva decât una și aceeași operație. A înmulți ceva cu un număr înseamnă să divizezi printr-un altul. Totul depinde de punctul de vedere pe care îl adoptăm.

Inventarea lui zero și a numerelor negative se produce prin același mod de gândire. Pentru a le crea, trebuie să îndrăznim să gândim contra propriei limbi, adică trebuie să regrupăm în sânul aceleiași idei concepte pe care limbajul le tratează ca fiind complet diferite. Oamenii de știință indieni au fost primii care s-au angajat în mod clar pe această cale.

Dacă vă spun că deja am pășit de câteva ori pe planeta Marte sau că m-am întâlnit de câteva ori cu Brahmagupta

în persoană, m-ați crede? Probabil că nu. Și ați avea dreptate, căci în cadrul limbii noastre frazele semnifică faptul că am mers efectiv pe Marte și că m-am întâlnit în realitate cu Brahmagupta. Cu toate acestea, în matematică, este suficient să ne imaginăm că aceste numere au valoarea zero pentru a înțelege că nu am mințit deloc. Limba folosește structuri diferite, după cum un lucru este sau nu este. Afirmație: „Am mers pe Marte"; negație: „Nu am mers pe Marte". Matematica va șterge aceste diferențe pentru a le regrupa într-una și aceeași formulă. „Am mers de câteva ori pe Marte." Acest număr („câteva ori") poate fi zero.

În timp ce, cu câteva secole în urmă, grecilor le era greu să-l accepte pe 1 ca fiind un număr, imaginați-vă revoluția pe care a reprezentat-o atribuirea numelui de „număr" unei absențe! Înaintea indienilor, câteva popoare au declanșat acest tip de gândire, dar niciunul nu a știut cum să o ducă până la capăt. Începând cu al III-lea secol înaintea erei noastre, mesopotamienii au fost primii care au inventat cifra zero. Înainte, sistemul lor de numerotare scria în același fel pe 25 și pe 250. Cu ajutorul cifrei 0, care desemnează un loc gol, posibilele confuzii au dispărut. Totuși, niciodată babilonienii nu vor acorda acestui 0 statutul de număr, adică să poată fi scris singur pentru a desemna o absență completă de obiecte.

La celălalt capăt al lumii, mayașii au inventat și ei un zero. De fapt, au inventat chiar doi! Primul, precum cel al babilonienilor, era folosit pentru a marca un loc gol în sistemul lor pozițional în baza douăzeci. În schimb, al doilea poate fi foarte bine considerat un număr, dar nu era folosit decât în contextul calendarului acestora.

Fiecare lună din calendarul mayaș avea douăzeci de zile, numerotate de la 0 la 19. Acest zero este utilizat singur, totuși utilizarea lui nu este de tip matematic, căci mayașii nu se serveau niciodată de el pentru a efectua operații aritmetice.

Pe scurt, Brahmagupta este primul care l-a descris întru totul pe zero ca număr, însoțit de o descriere a proprietăților sale. Scăzând un număr oarecare din el însuși, se obține zero; adăugând sau sustrăgând pe zero dintr-un număr, numărul rămâne neschimbat. Aceste proprietăți aritmetice ne par evidente, dar faptul că ele au fost atât de clar enunțate de Br hmagupta ne demonstrează că zero este definitiv integrat ca număr și are un statut asemănător tuturor celorlalte.

Zero deschide poarta spre numerele negative. Totuși va fi nevoie de mult timp până când matematicienii le vor accepta în mod definitiv.

Savanții chinezi sunt primii care au descris cantități ce ar putea fi asimilate numerelor negative. Liu Hui, în comentariile sale la cele *Nouă capitole,* descrie un sistem de bețișoare colorate care permit să ne reprezentăm cantitățile pozitive sau negative. Un bețișor roșu reprezintă un număr pozitiv, un bețișor negru, unul negativ. Liu Hui explică în detaliu cum interacționează unele cu celelalte aceste specii de numere și mai ales cum se adună sau se scad.

Descrierea este deja foarte amănunțită, rămânându-i totuși un singur pas de făcut: acela de a considera pozitivele și negativele nu ca fiind două grupuri distincte

care pot să interacționeze, ci ca unul și același ansamblu. Cu siguranță că numerele pozitive și negative nu au întotdeauna aceleași proprietăți atunci când vine vorba să facem calcule cu ele, dar, înainte de toate, au multe puncte comune care ne permit să le socotim asemănătoare. Situația poate fi comparată cu cea a numerelor pare și impare care formează două clanuri distincte, având proprietăți aritmetice diferite, dar care aparțin totuși aceleiași mari familii a numerelor.

Această reunificare, ca și în cazul lui zero, a fost realizată pentru prima oară tot de oamenii de știință indieni. Și tot Brahmagupta este cel care va alcătui un studiu complet al acestor numere în *Br hmasphu asiddh nta*. Mergând pe urmele lui Liu Hui, el realizează o listă completă cu regulile la care sunt supuse operațiile cu aceste noi numere. Ne arată, printre altele, că suma a două numere negative este tot un număr negativ, de exemplu (-3) + (-5) = -8, că produsul unui număr pozitiv și al unui număr negativ este tot negativ, (-3) x 8 = -24 sau că produsul a două numere negative este pozitiv (-3) x (-8) = 24. Acest ultim punct poate să pară contraintuitiv și va fi unul dintre lucrurile cel mai dificil de acceptat. Chiar și astăzi reprezintă o capcană binecunoscută de care se tem elevii din toată lumea.

De ce minus înmulțit cu minus face plus?

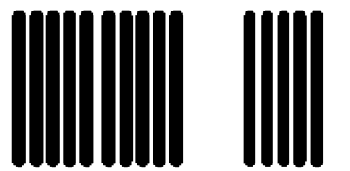
În secolele care au urmat după ce Brahmagupta le-a enunțat, regulile de înmulțire ale semnelor și în mod special „- x - = +“ nu vor înceta să provoace rețineri și multiple întrebări.

Aceste întrebări vor depăși cu mult lumea matematicienilor și vor genera multiple neînțelegeri imediat ce vor fi introduse în școli. În secolul al XIX-lea, însuși scriitorul francez Stendhal își va exprima neînțelegerea lor în romanul autobiografic *Viața lui Henry Brulard*. Autorul lui *Roșu și Negru* și al *Mănăstirii din Parma* scria următoarele rânduri:

După mine, ipocrizia era imposibilă în matematică și, în simplitatea mea tinerească, credeam ca așa stau lucrurile în toate științele despre care auzisem spunându-se că matematica are aplicabilitate. Ce puteam să mă fac eu când mi-am dat seama că nimeni nu putea să-mi explice de ce minus ori minus face plus (- x - = +)? (Aceasta este una dintre bazele fundamentale ale științei pe care o numim algebră.)
Ba și mai rău, această dificultate (care fără îndoială este explicabilă, căci conduce totuși la adevăr) îmi era explicată prin rațiuni extrem de neclare chiar și pentru cei care mi le prezentau [...] Am fost redus la ceea ce mi se spune și astăzi: trebuie să fie adevărat ca minus înmulțit cu minus să dea plus, deoarece, în mod evident, folosind de fiecare dată această regulă în calcule, ajungem la rezultate adevărate și indubitabile.

Regula de înmulțire a semnelor, care este cu siguranță destul de stranie la prima vedere, își capătă totuși sensul dacă o gândim în sistemul de bețișoare imaginate de oamenii de știință chinezi. Să

utilizăm, de exemplu, acest sistem pentru a reprezenta câștiguri sau pierderi monetare. Să ne imaginăm că un bețișor negru reprezintă 5 €, în timp ce un bețisor gri reprezintă o datorie de 5 €, adică -5 €. Astfel, dacă aveți zece bețisoare negre și cinci bețișoare gri, soldul se ridică la 25 €.



Să cercetăm acum diferitele cazuri de figuri care pot fi reprezentate atunci când contul dumneavoastră variază. Imaginați-vă că vi se dau 4 bețișoare negre suplimentare; soldul dumneavoastră crește în cazul acesta cu 20 €. Altfel spus, 4 x 5 = 20. Produsul a două numere pozitive este pozitiv. Până aici totul este clar.

Dacă acum vi se dau 4 bețișoare gri, adică 4 datorii, soldul dumneavoastră se micșorează cu 20 €, altfel spus, 4 x (-5) = -20. Un pozitiv înmulțit cu un negativ rezultă un negativ. În același fel, dacă vi se iau 4 bețișoare negre veți pierde tot 20 €. Asta înseamnă că (-4) x 5 = -20. Aceste ultime două situații ne arată foarte bine că a da datorii cuiva are același efect cu a-i lua bani. Adăugând negativul înseamnă să sustragi din pozitiv.

Iată-ne acum ajunși în punctul crucial. Ce se va întâmpla cu soldul dumneavoastră dacă vi s-ar lua

> patru bețisoare gri? Cu alte cuvinte, ce se întâmplă când vi se iau datoriile? Răspunsul este clar: soldul dumneavoastră crește; veți câștiga bani. Ceea ce poate fi reprezentat ca (-4) x (-5) = 20. A lua negativul înseamnă să adaugi pozitivul. Minus înmulțit cu minus este egal cu plus.

Apariția numerelor negative va bulversa și sensul adunării și scăderii. Problema este complet asemănătoare cu cea a înmulțirii cu 0,5 care reprezintă o împărțire la 2. Deoarece a aduna un număr negativ înseamnă să sustragem un număr pozitiv, aceste două operații își pierd sensul pe care le au în limbajul obișnuit. În mod curent, a aduna este sinonim cu a crește. Totuși, dacă adun numărul -3, asta înseamnă că scad 3: de exemplu, 20 + (-3) = 17, iar dacă sustrag (-3), asta înseamnă că adaug 3; 20 - (-3) = 23. Iată că din nou suntem pe cale să dăm același nume unor lucruri diferite. Datorită numerelor negative, adunarea și scăderea devin cele două fețe ale unei singure și aceleiași operații.

Această confuzie de cuvinte și impresia de paradox, precum „minus x minus = plus", vor încetini în mod considerabil acceptarea numerelor negative. Mult timp după Brahmagupta, numeroși oameni de știință vor continua să ignore aceste numere teribil de practice, dar atât de greu de priceput. Unii le vor numi chiar „numere absurde" și nu se vor resemna să le utilizeze în calculele lor intermediare decât cu condiția ca ele să nu mai apară în rezultatul final. Va trebui să așteptăm secolul al XIX-lea, și chiar XX, pentru ca legitimitatea lor să fie pe deplin acceptată, iar utilizarea lor pe deplin adoptată.

În 711, două mii de cavaleri cu cămilele lor vor veni dinspre Occident să debarce în valea Indusului. Aceste trupe sunt ale lui Muhamad Ibn-Qasim, tânărul comandant arab în vârstă de doar douăzeci de ani. Mai bine echipați și pregătiți, soldații săi vor spulbera armata de cincizeci de mii de oameni a lui *raja* (regele) Dahir și vor pune stăpânire pe regiunea Sindului și a deltei fluviului. Pentru populațiile locale, evenimentul este tragic, căci mii de soldați sunt decapitați, iar regiunea este prădată complet.

Totuși, apariția tânărului Imperiu Arabo-Musulman la porțile Indusului va oferi o șansă pentru difuzarea matematicii indiene. Savanții arabi vor integra foarte repede descoperirile în lucrările lor și le vor da o sonoritate mondială al căror ecou se aude încă și în matematica secolului XXI.

8

Puterea triunghiurilor

În 762, iată-ne înapoi în Mesopotamia, acolo de unde a început totul. În timp ce Babilonul nu mai este decât un câmp de ruine, lucrări amețitoare se desfășoară la o sută de kilometri mai spre nord. Aici, pe malul drept al Tigrului, califul Abassid Al-Mansûr s-a decis să-și așeze noua capitală.

Imperiul Arabo-Musulman tocmai cunoaște un secol de expansiune meteorică. O sută treizeci de ani mai devreme, în 632, când Brahmagupta avea treizeci și patru de ani și tocmai termina redactarea *Br hmasphu asiddh nta,* Mahomed murea la Medina. După el, califatele care se succed vor face cuceriri în lanț și vor propaga islamul din sudul Spaniei până pe malurile Indusului, trecând prin Africa de Nord, Persia și Mesopotamia.

Al-Mansûr domnește asupra unui califat de peste zece milioane de kilometri pătrați. Transpus în zilele noastre, acest teritoriu s-ar plasa pe locul doi în lume ca mărime după Rusia, dar mai mare decât Canada, Statele Unite sau China. Al-Mansûr era un calif iluminat, iar pentru a-și construi capitala a adus din lumea arabă cei mai buni arhitecți, artizani și artiști. Alegerea locului și a datei de început a lucrărilor le lasă în seama geografilor și astrologilor săi.

Va fi nevoie de patru ani și mai mult de o sută de mii de muncitori pentru a înălța din temelie orașul pe care îl visa. Cetatea are particularitatea de a fi perfect rotundă. Zidul său dublu de la exterior, lung de opt kilometri circumferință, este fortificat de o sută douăsprezece turnuri și se deschide prin patru porți orientate conform diagonalelor celor patru puncte cardinale. În centrul orașului se află cazarmele, moscheea și palatul califului, al cărui dom de culoare verde se înalță la aproape cincizeci de metri de sol și este vizibil de la douăzeci de kilometri.

În momentul inaugurării sale, cetatea va fi numită Mad nat as-Sal m, adică Cetatea Păcii. Va fi numită și Mad nat al-Anw r, adică Cetatea Luminilor sau ' simat ad-Duny , Capitala Lumii. Totuși, orașul lui Al-Mansûr va intra în istorie sub un alt nume: Bagdad.

Populația Bagdadului va atinge rapid mai multe sute de mii de locuitori. Cetatea se află la intersecția marilor căi comerciale, iar străzile sunt un furnicar de negustori veniți din cele patru colțuri ale lumii. Tarabele sunt pline de mătase, aur și fildeș, aerul se umple de parfumuri și de condimente, orașul zumzăie de povești din depărtări. Suntem în epoca celor *O mie și una de nopți* și a legendelor; a acelora cu sultani, viziri și prințese, cu covoare zburătoare, duhuri și lămpi magice.

Al-Mansûr și califii care-i vor urma doresc să facă din Bagdad un oraș de primă clasă pe plan cultural și științific. Pentru acest lucru și pentru a-i determina pe cei mai mari oameni de știință să vină aici, ei se vor folosi de o momeală care și-a dovedit deja eficacitatea cu o mie de ani mai devreme în Alexandria: crearea unei biblioteci.

La sfârșitul secolului al VIII-lea, califul Hârûn ar-Rachîd începe să alcătuiască o colecție de cărți cu dorința de a păstra și de a revitaliza cunoștințele acumulate de greci, mesopotamieni, egipteni sau indieni.

Numeroase texte sunt copiate și traduse în arabă. Operele grecești, care circulă în mare număr în mediile intelectuale, vor fi primele integrate de către oamenii de știință din Bagdad. În câțiva ani, mai multe ediții arabe ale *Elementelor* lui Euclid vor vedea lumina zilei. Vor fi traduse totodată mai multe tratate ale lui Arhimede, printre care și cel cu privire la măsurarea cercului, *Almagestele* lui Ptolemeu sau *Aritmetica* lui Diophante.

La începutul secolului al IX-lea, matematicianul Mohamed al-Khw rizm publică o operă importantă, *Cartea despre calculul indian,* în care expune sistemul de numerotare zecimal de sorginte indiană. Datorită lui, cele zece cifre, inclusiv zero, se vor răspândi în toată lumea arabă, iar de aici se vor impune în mod definitiv în întreaga lume. În arabă, zero se pronunță *zifr*, care înseamnă „vid". Când va ajunge în Europa, acest cuvânt se va dedubla. Pe de o parte, în italiană va deveni „zefiro" ce va da numele „zero"-ului nostru, pe de alta, va fi „cifra" în latină, care va desemna cuvântul „cifră." Uitând rădăcinile indiene ale celor zece simboluri, europenii le vor denumi cifre arabe.

În 809, Hârûn ar-Rachîd moare, iar fiul său Al-Am n îl înlocuiește. Acesta din urmă nu va domni mult timp, fiind detronat în 813 de fratele său, Al-Mamun.

Legenda spune că într-o noapte, Al-Mamun l-a văzut în vis pe Aristotel. Această întâlnire îl impresionează profund pe tânărul calif, care se decide să dea un nou impuls cercetărilor științifice și să primească și mai mulți oameni de știință în orașul său. Așa se face că în 832 biblioteca Bagdadului dă naștere unei instituții destinate să favorizeze conservarea și dezvoltarea cunoștințelor științifice. Clădirea care adăpostește această instituție capătă numele de Bayt al-Hikma, Casa Înțelepciunii, al cărei mod de funcționare amintește în mod straniu de acela al Museionului din Alexandria.

Califul se implică puternic în dezvoltarea acesteia. El intervine în mod direct pe lângă marile puteri din străinătate, precum Imperiul Bizantin, pentru a aduce la Bagdad operele rare care ar putea fi aici copiate și traduse. El comandă oamenilor de știință opere destinate să fie difuzate pe întregul califat. Câteodată asistă în persoană la dezbaterile științifice sau filosofice care sunt organizate cel puțin o dată pe săptămână în sânul Bayt al-Hikma.

De-a lungul secolelor, Casa Înțelepciunii din Bagdad își va crea sucursale în întreaga lume arabă. Numeroase alte orașe își vor dota la rândul lor bibliotecile și instituțiile destinate să-i găzduiască pe oamenii de știință, printre cele mai influente și active dintre ele numărându-se cea din Cordoba, în Andaluzia, fondată în secolul al X-lea, cea din Cairo, în Egipt, în secolul al XI-lea, sau cea din Fes, de pe teritoriul actualului Maroc, în secolul al XIV-lea.

Trebuie să spunem că această descentralizare științifică va fi facilitată substanțial de apariția unei invenții

originare din China și repuse în valoare aproape din întâmplare în 751, în urma bătăliei de la Tablas, din actualul Kazakhstan: este vorba despre hârtie. Ea înlesnește copierea și transportul cărților. De acum încolo nu mai sunt necesare călătoriile la Bagdad pentru a fi la curent cu ultimele descoperiri în materie de matematică, astronomie sau geografie. Marii oameni de știință vor putea să lucreze și să producă opere novatoare în toate cele patru colțuri ale Imperiului Arabo-Musulman.

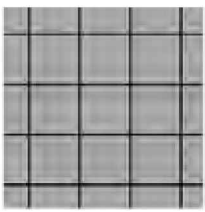
Pavajele din Alhambra

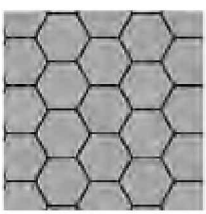
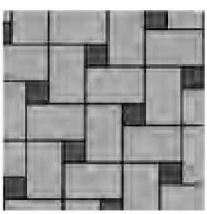
În timp ce în sânul Bayt al-Hikma marile spirite scriu istoria matematicii, o altă istorie își continuă firul pe străzile Bagdadului și ale orașelor arabe. În principiu, islamul interzice reprezentarea ființelor umane sau animale în moschei sau alte locuri religioase. Pentru a îndulci această interdicție, artizanii musulmani dau dovadă de o creativitate care îți taie răsuflarea, prin elaborarea unor motive geometrice decorative.

Aduceți-vă aminte de primii artizani sedentarizați ai Mesopotamiei, care imaginau motive diferite pentru a-și decora vasele. Ei au descoperit, fără să știe, cele șapte categorii de frize posibile. Dar dacă o friză este o figură care se repetă urmând o direcție, ne putem la fel de bine imagina că se repetă urmând două direcții, pentru a acoperi suprafețe întregi. Acestea din urmă se vor numi „pavaje". Străzile din Bagdad și din orașele musulmane se vor îmbrăca

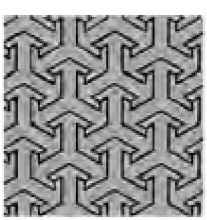
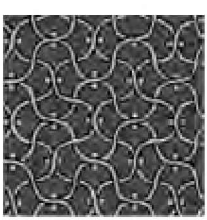
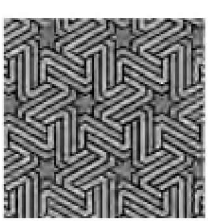
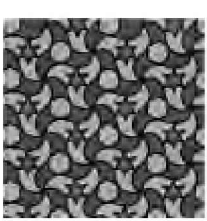
din ce în ce mai mult cu o geometrie bogată care va deveni una dintre mărcile artei islamice.

Unele pavaje sunt destul de simple.



Altele sunt mai complexe.

Mai târziu, matematicienii vor ajunge să demonstreze că există în total șaptesprezece categorii geometrice de pavaje, clasate în funcție de transformările geometrice care le lasă invariante. Fiecare dintre aceste categorii poate apoi să dea naștere unei infinități de variante diferite. Artiștii arabi, fără a cunoaște această teoremă, vor descoperi cele șaptesprezece categorii și le vor expune magistral în arhitectura lor, precum și în ornamentarea obiectelor de artă sau ale vieții cotidiene.

În Andaluzia, la Granada, Palatul Alhambra reprezintă unul dintre monumentele cele mai reprezentative pentru prezența islamică în Spania Evului Mediu. Mai mult de două milioane de turiști îl vizitează în fiecare an, dar ceea ce puțini dintre ei știu este că palatul deține o reputație specială în lumea matematicienilor. Alhambra este, prin urmare, cunoscut pentru faptul că prezintă fiecare dintre cele șaptesprezece categorii de pavaje existente, diseminate (și câteodată foarte bine ascunse) de-a lungul sălilor și grădinilor sale.

Așadar, dacă veți trece vreodată prin Granada, știți ce vă rămâne de făcut!

Să mai zăbovim puțin în Bagdad și să îndrăznim să deschidem porțile Bayt al-Hikma pentru a vedea ce se întâmplă înăuntru. Oare ce fel de matematici noi mai scornesc acești matematicieni arabi? Despre ce vorbesc aceste cărți proaspăt scrise care umplu etajerele bibliotecii?

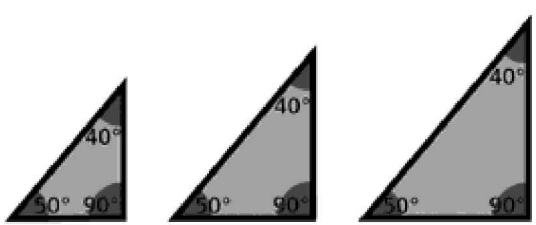
Una dintre disciplinele care se va dezvolta cel mai mult de-a lungul acestei perioade este trigonometria, adică studiul măsurilor trigoanelor, numite și triunghiuri. La prima vedere, ar părea dezamăgitoare această preocupare, căci popoarele antice au studiat deja triunghiurile. Mărturie stă teorema lui Pitagora. Totuși, arabii vor continua cercetările până într-acolo încât vor realiza o disciplină de o precizie remarcabilă, ale cărei rezultate au și astăzi multiple aplicații.

Contrar a ceea ce am putea crede, triunghiurile nu sunt întotdeauna așa de ușor de înțeles și multe aspecte ale lor au rămas neelucidate la sfârșitul Antichității. Pentru a cunoaște bine un triunghi avem nevoie în principal de șase informații în legătură cu el: lungimile celor trei laturi și măsurile celor trei unghiuri.

Numai că, pentru a utiliza trigonometria pe teren, adesea ar fi mai simplu să măsurăm unghiul dintre două laturi decât distanța dintre două puncte. Astronomia este exemplul cel mai bun în acest sens: a cunoaște distanța care separă stelele pe care le observăm pe cer este o problemă foarte grea, iar pentru a răspunde la ea vor mai trece încă multe secole. În schimb, a măsura unghiul pe care îl formează aceste stele între ele sau între ele și linia orizontului este cu mult mai simplu. Un octant, adică strămoșul sextantului, ne-ar fi suficient în acest sens. În același fel, un geograf care vrea să stabilească harta unui teritoriu va putea să măsoare cu ușurință unghiurile unui triunghi format din trei munți. Pentru acest lucru nu are nevoie decât de o alidadă, care nu-i nimic altceva decât un raportor prevăzut cu un sistem optic, iar pentru

a orienta harta în spațiu, o simplă busolă îi va permite să măsoare unghiul între nord și o altă direcție dată. A măsura distanța între trei munți necesită, în schimb, organizarea unei expediții mult mai complicate și a unor calcule care sunt în mod evident mult mai complexe. Alexandru și bematiștii săi nu ne vor contrazice cu privire la aceste eforturi!

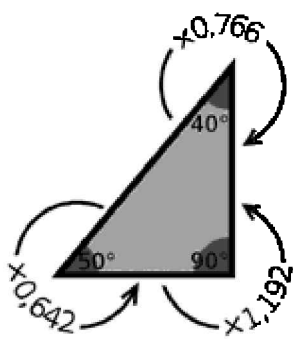
Scopul jocului este în acest caz următorul: cum putem dobândi toate informațiile cu privire la un triunghi, măsurând cât mai puține distanțe posibil? Punându-și această întrebare, trigonometrii se vor confrunta cu o problemă asemănătoare aceleia puse de cercul lui Arhimede cu o mie de ani mai devreme. Mai întâi, dacă veți cunoaște toate unghiurile unui triunghi, dar nicio latură a sa, îi puteți deduce forma, dar nu și mărimea. Ca dovadă, triunghiurile următoare au unghiurile identice, dar lungimile laturilor diferite.



Toate au însă aceleași proporții. De exemplu, dacă ne întrebăm cu ce număr trebuie să înmulțim lungimea celei mai mari laturi pentru a o obține pe cea mai mică, vom regăsi același rezultat pentru fiecare dintre cele trei triunghiuri: 0,64. Cam în același fel procedăm cu perimetrul

unui cerc, care se obține întotdeauna înmulțind diametrul cu π, indiferent cât de mare ar fi mărimea lui.

În tot cazul, vorbim de aproape 0,64. Acest număr nu este decât o aproximație. Precum în cazul lui π, această proporție nu se poate calcula cu precizie și va trebui să ne mulțumim cu valorile ei apropiate. Cu ceva mai multă precizie, vom obține 0,642 sau chiar 0,64278, dar mereu va fi insuficient. Scrierea zecimală a acestui număr are o infinitate de cifre după virgulă. Același lucru se întâmplă și cu alte raporturi care se pot calcula în aceste triunghiuri. Astfel, se trece de la latura mare la cea medie înmulțind cu aproximativ 0,766, iar de la cea mică la cea medie înmulțind cu aproximativ 1,192.



Deoarece este imposibil să atribuim acestor trei raporturi valori exacte, matematicienii le-au dat denumiri pentru a putea să le studieze mai bine. Mai multe nume s-au folosit în funcție de loc și epocă, dar astăzi noi le

numim „cosinus", „sinus" și „tangentă". Numeroase variante au fost totodată inventate și exploatate înainte de a cădea în uitare. *Sekedul* de care se serveau egiptenii pentru a calcula panta piramidelor este un astfel de exemplu. Coarda, introdusă de greci și care corespunde unui raport într-un triunghi isoscel, este un altul.

Raporturile trigonometrice vor pune totuși o nouă problemă. Valorile acestea variază de la un triunghi la altul. Astfel, raporturile de 0,642; 0,766 și 1,192 sunt valabile doar în cazul triunghiurilor care au unghiurile de 40°, 50°, 90°. Dacă, din contră, avem un triunghi dreptunghic cu unghiurile de 20°, 70° și 90°, atunci cosinusul, sinusul și tangenta vor avea valorile de aproximativ 0,342, 0,940 și 2,747. Pe scurt, sarcina matematicienilor trigonometri este mult mai complexă decât era de așteptat. Nu este vorba doar despre găsirea unui număr, nici măcar a trei numere, ci despre tabele întregi de numere care variază în funcție de toate unghiurile posibile pe care va trebui să le calculăm.

În continuare este prezentat un tabel trigonometric pentru triunghiurile dreptunghice în care unul dintre unghiuri variază între 10° și 80°. Observați că pentru fiecare triunghi este dat un singur unghi. De fapt, nu este nevoie să indicăm cele două unghiuri care pot fi regăsite fără greutate: pe de o parte, unghiul drept măsoară întotdeauna 90°, iar pe de altă parte, o teoremă spune că suma celor trei unghiuri dintr-un triunghi este întotdeauna 180°, lucru care ne permite să-l deducem pe cel de-al treilea. Ce-i drept, nici măcar nu este nevoie să mai trasăm triunghiurile: dacă avem doar un unghi este suficient pentru a-l reconstitui.

Triunghi	Cosinus	Sinus	Tangentă
	0,9848	0,1736	0,1763
	0,9397	0,3420	0,3640
	0,8660	0,5	0,5774
	0,7660	0,6428	0,8391
	0,6428	0,7660	1,1918
	0,5	0,8660	1,7321
	0,3420	0,9397	2,7475
	0,1736	0,9848	5,6713

Iată de ce prima coloană din tabelul trigonometric indică, în general, doar unghiul. Vom spune astfel că avem cosinusul de 10° egal cu 0,9848 sau că tangenta de 50° este de 1,1918.

Bineînțeles că un tabel trigonometric nu este niciodată complet. Întotdeauna poate fi îmbunătățit, fie prin găsirea celor mai bune aproximări ale raporturilor care se găsesc în el, fie prin rafinarea evantaiului de triunghiuri reprezentate. În tabelul prezentat apar triunghiuri ale căror unghiuri variază din 10° în 10°, deși ar fi de preferat să avem o precizie de un grad sau chiar o zecime de grad. Pe scurt, a calcula tabelele trigonometrice din ce în ce mai exact constituie o sarcină fără sfârșit, la care generații de matematicieni se vor înhăma pe rând. Va trebui să așteptăm apariția calculatoarelor electronice în secolul XX pentru a-i elibera, în sfârșit, pe matematicieni de această sarcină.

Grecii au fost fără îndoială primii care au elaborat tabele trigonometrice. Cele mai vechi care ne-au parvenit se găsesc în *Almageste* a lui Ptolemeu și ar fi fost împrumutate de la Hipparc din Niceea, un matematician din secolul al II-lea înaintea erei noastre. La sfârșitul secolului al V-lea, savantul indian Aryabhata va publica și el tabelele sale trigonometrice. În Evul Mediu îi vom regăsi pe perșii Omar Khayyam, în secolul al XI-lea, și al- Kashi, în secolul al XIV-lea, care sunt printre cei care vor elabora cele mai cunoscute tabele.

Oamenii de știință din lumea arabă vor juca un rol primordial, nu doar în sensul contribuției la elaborarea tabelelor foarte precise, ci mai ales pentru ceea ce vor

face cu acestea. Ei vor duce pe culmi arta de a jongla cu aceste date și de a le utiliza într-un mod cât mai eficient posibil.

Astfel se face că în 1427 al-Kashi va publica o lucrare intitulată *Miftah al-Hisab* sau *Cheia Aritmeticii*, în care el enunță un rezultat care generalizează teorema lui Pitagora. Datorită unei ingenioase utilizări a cosinusurilor, al-Kashi ajunge să elaboreze o teoremă care se aplică absolut tuturor triunghiurilor, și nu doar celor dreptunghice. Teorema lui al-Kashi funcționează printr-o corecție adusă teoremei lui Pitagora: atunci când triunghiul nu este dreptunghic, suma pătratelor care se pot construi pe primele două laturi nu este egală cu pătratul construit pe cea de-a treia latură. Totuși, această egalitate devine adevărată cu condiția de a adăuga un termen corector care se calculează direct, pornind de la cosinusul unghiului dintre primele două laturi.

Când al-Kashi publica acest rezultat, el nu mai era un necunoscut în lumea matematică, devenise celebru trei ani mai devreme prin calcularea unei aproximări a numărului π până la cea de-a șaisprezecea zecimală. Era un record pentru epoca respectivă! Dar dacă recordurile sunt făcute pentru a fi doborâte[1], teoremele, în schimb, rămân fixe. Teorema lui al-Kashi este până în ziua de astăzi unul dintre rezultatele trigonometrice cele mai utilizate.

Suntem în luna iunie pe Rive Gauche[2] la Paris și iată-mă transformat într-un ghid turistic mai special.

---

1 Matematicianul olandez Ludolph Van Ceulen va calcula o sută șaptezeci de ani mai târziu până la 35 de zecimale. *(N.a.)*

2 Malul stâng al Senei. *(N.r.)*

Astăzi, împreună cu un grup de douăzeci de persoane, parcurgem străzile Cartierului Latin pe urmele matematicii și ale istoriei sale. Următoarea noastră oprire este prevăzută în grădina marilor exploratori. La nord, vedem aleile simetrice ale Grădinii Luxembourg, fugind în rânduri masive spre palatul Senatului. La sud, cupola Observatorului din Paris își umflă silueta rotunjită deasupra acoperișurilor capitalei.

Urmând axa grădinii, mergem ca pe sârmă pe linia precisă a meridianului Parisului. Un pas mai la stânga, și suntem în emisfera estică a lumii. Doi pași la dreapta, și vom ajunge în cea vestică. Cinci sute de metri mai încolo meridianul traversează Observatorul chiar prin inima sa, continuând prin mijlocul celui de-al 14-lea arondisment, apoi iese din Paris prin parcul Montsouris. Își continuă drumul peste zona rurală franceză, taie o bucată din Spania și se aruncă peste continentul african și Oceanul Antarctic pentru a-și continua cursa până la Polul Sud. În spatele nostru urcă pe străzile Montmartre-ului, străbate insulele britanice și Norvegia, pentru a ajunge la Polul Nord.

Nu a fost un lucru ușor să se stabilească trasarea exactă a meridianului. Acest lucru va cere efectuarea de calcule precise de-a lungul unor întinderi imense. Cum procedăm, de exemplu, pentru a măsura distanța între două puncte situate de-o parte și de alta ale unui munte fără a fi nevoie să îl traversăm? Pentru a răspunde la această întrebare, oamenii de știință de la începutul secolului al XVIII-lea au alcătuit meridianul pornind de la o succesiune de triunghiuri virtuale care străbat Franța de la nord la sud.

Ca loc de plecare al triangulației au fost alese punctele aflate pe înălțimi, precum colinele, munții sau clopotnițele, de unde era posibil să fie văzute alte puncte pentru a măsura unghiurile dintre ele.

Odată ce măsurătorile au fost făcute pe teren, nu mai rămânea decât să fie utilizate din belșug procedeele trigonometrice puse la punct de arabi pentru a determina poziția exactă a punctelor triangulației și, cu ajutorul lor, a meridianului.

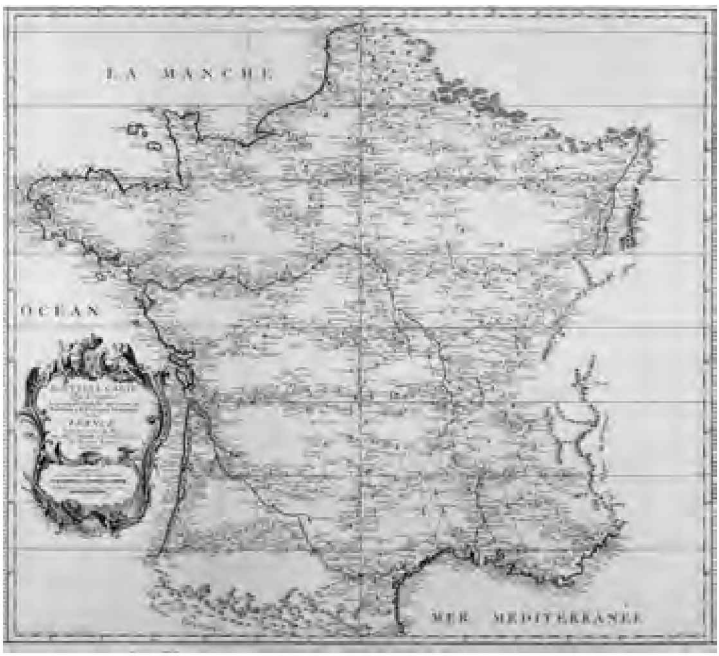
Cei din neamul Cassini vor fi primii care se vor dedica acestei misiuni. Familia Cassini este o adevărată dinastie de oameni de știință și are atâția reprezentanți de seamă, încât am putea să-i numerotăm cum îi numerotăm pe regi.

Giovanni Domenico, numit și Cassini I, proaspăt emigrat din Italia, a fost primul director al Observatorului din Paris odată cu inaugurarea sa din 1671.

Fiul lui, Jacques, zis Cassini al II-lea, îi va urma după moartea sa din 1712. Ei vor fi cei care vor stabili prima triangulație a meridianului, care a fost încheiată în 1718.

După ei, Cassini al III-lea (César-François, fiul lui Jacques) a făcut din triunghiulația meridianului coloana vertebrală a primei triangulații complete a teritoriului francez. În urma acestor calcule va rezulta publicarea, în 1744, a primei hărți a Franței realizată printr-un procedeu științific riguros.

Fiul acestuia, Cassini al IV-lea, pe numele de botez Jean-Dominique, îi va continua munca îmbunătățind și mai mult triangulația pe fiecare regiune.



Harta Franței din 1744, pe care este reprezentat meridianul Parisului, precum și principalele triunghiuri ale lui Cassini.

Mergând pe acest meridian, urmăm indirect pașii oamenilor de știință arabi care au pus bazele teoretice ale acestor triangulații. Fiecare triunghi de pe hartă a necesitat folosirea cosinusului, a sinusului sau a tangentei. Fiecare dintre ele poartă în forma lui moștenirea lui al-Kashi și a primilor trigonometri din Bagdad. Pentru toate aceste calcule făcute cu creionul a fost nevoie de nenumărate ore de muncă însoțite de tabele trigonometrice făcute de oamenii de știință ai Observatorului.

Triangulațiile au continuat să fie folosite până la sfârșitul secolului XX, odată cu apariția sateliților. Cele mai precise rețele numărau până la 80 000 de puncte. Bornele care marcau aceste puncte sunt vizibile și astăzi, fiind răspândite aproape pe tot teritoriul francez. La Paris se pot încă vedea cele două repere care determină axa meridianului: unul se găsește în sud, în parcul Montsouris, iar celălalt la nord de Montmartre. În 1994, o sută treizeci și cinci de medalioane cu numele astronomului François Arago au fost așezate pe traiectoria meridianului din capitală. Unul dintre ele se găsește chiar în interiorul muzeului Luvru. Data viitoare când vă veți plimba pe străzile pariziene, deschideți ochi, căci s-ar putea să întâlniți câteva!

Atunci când sistemul metric, din dorința de universalitate, a văzut lumina zilei, în urma Revoluției franceze, lungimea metrului a fost raportată la cea a meridianului. Un metru a fost definit cu precizie ca fiind a zecea milionime dintr-un sfert de meridian. În 1796, șaisprezece metri etalon au fost sculptați în marmură și instalați în cele patru colțuri ale Parisului pentru ca oricine să poată veni să și le ia ca reper. Două dintre acestea sunt vizibile și astăzi. Unul pe strada Vaugirard, în fața Grădinii Luxembourg, iar celălalt în piața Vendôme, la intrarea în Ministerul de Justiție.

Meridianul Parisului a fost de referință până la Conferința Internațională de la Washington, în 1884, când a fost înlocuit de meridianul Greenwich, ce trece prin Observatorul Regal din Londra. Drept compensație, britanicii s-au angajat să adopte sistemul metric. Așteptăm și astăzi să se întâmple acest lucru!

Odată cu apariția informaticii și a sateliților, tabelele trigonometrice și triangulațiile la sol au devenit inutile. Dar, în tot cazul, trigonomia nu a dispărut. Ea și-a găsit locul în inima procesoarelor computerelor. Triunghiurile sunt ascunse, dar sunt mereu acolo.

Iată, priviți mașinile care se perindă pe bulevardul Observatorului. Multe dintre ele sunt echipate cu sisteme de poziționare GPS. În fiecare moment, traiectoriile lor sunt determinate prin poziționarea relativă față de patru sateliți care le urmăresc din spațiu. Rezolvarea ecuațiilor care rezultă din aceste calcule face apel încă o dată la trigonometrie. Știu, oare, conducătorii auto că această voce care le ordonă calm să o ia la stânga vorbește chiar în momentul în care au fost calculate câteva sinusuri sau cosinusuri?

Și apoi ați auzit probabil, în miezul serialului polițist preferat, cum unul dintre anchetatori anunță că telefonul suspectului a fost localizat prin triangulație? Acest gen de poziționare constă în determinarea poziției unui telefon mobil în funcție de distanța sa față de cele mai apropiate trei antene-releu. Această problemă de geometrie se rezolvă fără mare greutate cu ajutorul câtorva formule de trigonometrie pe care calculatoarele noastre le efectuează în prezent cu viteza luminii.

Nemulțumindu-se doar cu măsurarea realității, trigonometria se va insinua și în crearea lumilor virtuale. Filmele de animație 3D și jocurile video se folosesc din abundență de ea. În spatele texturilor pe care le prezintă graficienii, formele 3D sunt alcătuite din înlănțuiri

geometrice care ne aduc aminte în mod deosebit de triangulațiile familiei Cassini. Aceste înlănțuiri sunt cele care, deformându-se, animează obiectele și personajele. Calculul celei mai mărunte imagini de sinteză, precum cea a ceainicului din Utah, care a fost unul dintre primele obiecte modelate pe calculator, în 1975, a necesitat aplicarea unui număr mare de formule trigonometrice.

9

Spre o necunoscută

Să ne întoarcem la Bagdad! Dintre toți oamenii de știință care frecventează Bayt al-Hikma, unul dintre ei își va marca în mod deosebit epoca: Muhammad ibn al-Khw rizm .

Al-Khw rizm este un matematician persan născut în anul 780. Familia sa este originară din regiunea Khwarezm, care se întinde pe actualele teritorii din Iran, Uzbekistan și Turkmenistan. Nu se cunoaște cu siguranță dacă al-Khw rizm s-a născut acolo sau dacă părinții au emigrat la Bagdad înainte de nașterea sa, însă știm că în acest oraș tânărul savant se va fi aflat la începutul secolului al IX-lea. El va fi printre primii oameni de știință care s-au alăturat Bayt al-Hikma și și-a construit aici o reputație de prim rang.

Pe străzile Bagdadului, al-Khw rizm este cunoscut mai ales ca astronom. El scrie mai multe tratate teoretice, care reiau cunoștințele grecești sau indiene, precum și lucrări practice despre utilizarea unui cadran solar sau fabricarea unui astrolab. Își utilizează totodată cunoștințele pentru a elabora tabele geografice care conțin latitudini și longitudini ale celor mai importante locuri din lume. Meridianul său de referință, inspirat din Ptolemeu, rămâne totuși aproximativ. Se consideră că acesta trecea

prin Insulele Norocoase, al căror amplasament mai mult sau mai puțin mitologic pare a fi situat în extremitatea vestică a lumii și ar putea corespunde actualelor Insule Canare.

În matematică, al-Khw rizm este cel care va scrie faimoasa *Carte asupra calculului indian,* ce va prezenta întregii lumi sistemul zecimal pozițional. Și dacă ar fi scris numai această carte ar fi fost suficient să intre în Panteonul matematicienilor. Cu toate acestea, o altă carte – având un conținut revoluționar – va fi cea care îi va asigura un loc definitiv printre cei mai mari matematicieni din istorie, alături de Arhimede și Brahmagupta.

Al-Mamun în persoană va fi cel care îi va comanda această carte, căci califul dorea să pună la dispoziția populației un manual de matematică util pentru toată lumea, în vederea rezolvării problemelor care se pun în viața de zi cu zi. Al-Khw rizm s-a conformat și a început să compileze o listă de probleme clasice însoțite de metoda lor de rezolvare. Regăsim aici, printre altele, probleme despre măsurarea terenurilor, despre tranzacțiile comerciale sau despre repartizarea unei moșteniri între diferiții membri ai unei familii.

Cu toate că sunt foarte interesante, toate aceste probleme nu aduc nimic nou, iar dacă al-Khw rizm ar fi respectat strict cererea califului, fără îndoială că această carte nu ar fi rămas posterității. Totuși, savantul persan nu se oprește aici și decide să adauge în introducerea lucrării o primă parte pur teoretică. El prezintă, într-o manieră structurată și abstractă, diferitele metode de rezolvare care sunt puse în practică în problemele concrete.

Odată lucrarea terminată, al-Khw rizm o va numi *Kit b almukhta ar f ist b al-jabr wa-l-muqt bala (Compendiu de calcul prin restaurare și comparație).* Atunci când, mai târziu, a fost tradusă în latină, ultimele cuvinte ale titlului în arabă au fost reluate fonetic, iar cartea s-a numit *Liber Algebrae* și *Almucabola.* Puțin câte puțin s-a renunțat la termenul *Almucabola* și s-a lăsat loc doar cuvântului care de acum încolo va desemna disciplina inițiată de al-Khw rizm : al-Jabr, *algebrae*, algebră.

În afară de conținutul matematic, ceea ce revoluționează al-Khw rizm este formularea metodei sale. El va detalia procedeele de rezolvare ale problemelor independent de problemele însele. Pentru a înțelege mai bine acest lucru, să ne aplecăm asupra următoarelor trei întrebări:

1. *Un câmp dreptunghiular are 5 unități în lățime și o suprafață de 30. Cât măsoară lungimea sa?*
2. *Un om de 30 de ani are de 5 ori vârsta fiului său. Ce vârstă are fiul?*
3. *Un vânzător a cumpărat 30 de kilograme de stofă în 5 role identice. Cât cântărește fiecare rolă?*

În toate cele trei cazuri răspunsul este 6. Și vedem foarte bine că, rezolvând aceste probleme, indiferent de subiectul pe care îl tratează, matematica aflată în spatele unor situații complet diferite este aceeași. În toate cele trei cazuri rezultatul se află printr-o împărțire: 30 : 5 = 6. Primul demers al lui al-Khw rizm constă în a deposeda

aceste întrebări de contextul lor pentru a extrage o problemă pur matematică:

Se caută un număr care înmulțit cu 5 să dea 30.

În această formulare ignorăm ce reprezintă numerele 5 și 30. Ar putea foarte bine să fie vorba despre dimensiuni geometrice, vârste, role de stofă sau orice altceva. Acest lucru nu schimbă cu nimic modul în care vom proceda în aflarea răspunsului. Obiectivul algebrei este așadar să propună metode care să permită rezolvarea acestui tip de ghicitori pur matematice. În Europa, ele vor căpăta, câteva secole mai târziu, numele de „ecuații".

Al-Khw rizm merge și mai departe cu studiul ecuațiilor. El spune că metoda nu mai depinde nici măcar de datele numerice ale problemei. Priviți următoarele trei ecuații:

1. Se caută un număr care înmulțit cu 5 să dea 30.
2. Se caută un număr care înmulțit cu 2 să dea 16.
3. Se caută un număr care înmulțit cu 3 să dea 60.

Fiecare dintre aceste ecuații grupează prin formularea sa o multitudine de probleme diferite, concrete. Știm că pentru rezolvarea lor se va recurge la aceeași metodă. În cele trei cazuri regăsim soluțiile prin împărțirea celui de-al doilea număr la primul: în primul caz 30 : 5 = 6, pentru al doilea 16 : 2 = 8 și pentru al treilea 60 : 3 = 20. Așadar, metoda de rezolvare nu este independentă numai de problema concretă, ci și de numerele care intervin în această problemă.

Este posibil, astfel, să formulăm aceste ecuații într-o manieră și mai abstractă:

> *Se caută un număr anume care, înmulțit cu o cantitate 1, să dea o cantitate 2.*

Toate problemele de acest tip vor putea fi rezolvate în același fel: este suficient să împărțim cantitatea 2 la cantitatea 1.

Bineînțeles că acest exemplu este foarte simplu. El nu presupune decât o înmulțire, iar rezolvarea utilizează doar o împărțire. Dar sunt posibile și alte tipuri de ecuații în care necunoscuta să suporte mai multe operații diferite. Al-Khw rizm se va apleca, în principal, asupra ecuațiilor în care necunoscuta suportă patru operații de bază (adunare, scădere, înmulțire și împărțire), precum și ridicarea la putere. Iată un astfel de exemplu:

> *Se caută un număr al cărui pătrat să fie egal cu de 3 ori valoarea sa mărită de 10 ori.*

De data aceasta rezultatul este 5. Pătratul lui 5 este 25 și avem 25 = 3 x 5 + 10. Am avut noroc, căci această soluție este un număr întreg și a fost posibil să-l ghicim prin mai multe încercări. Dar când soluțiile sunt numere foarte mari sau cu virgulă, este necesar să dispunem de o metodă precisă care să ne permită să le găsim valorile într-un mod sistematic. Exact acest lucru îl construiește al-Khw rizm în introducerea cărții sale. El descrie aici etapă cu etapă calculele pe care trebuie

să le efectuăm pornind de la datele problemei și indiferent de aceste date. Al doilea pas a fost să redacteze și demonstrațiile care dovedesc că metodele sale sunt funcționale.

Așadar, demersul lui al-Khw rizm se înscrie perfect în dinamica globală a matematicii care tinde spre abstracție și generalitate. De mult timp deja obiectele matematice deveniseră independente de obiectele reale pe care le reprezentau. Odată cu al-Khw rizm , raționamentele pe care le facem asupra obiectelor se detașează de problemele pe care trebuie să le rezolve.

Clasificarea ecuațiilor

Nu toate ecuațiile sunt ușor de rezolvat. Există chiar unele cu care matematicienii de astăzi încă își bat capul. Dificultatea unei ecuații depinde în mod esențial de operațiile care o compun.
Astfel, dacă necunoscuta nu suportă decât adunări, scăderi, înmulțiri și împărțiri, se vorbește despre ecuații de gradul I. Iată câteva exemple:

Ce număr dă 10 dacă îi adăugăm 3?
Ce număr dă 15 dacă îl împărțim cu 2?
Ce număr dă 0 dacă îl înmulțim cu 2 după ce i-am scăzut 10?

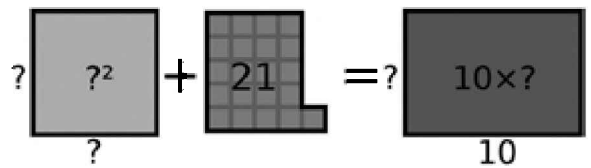
Ecuațiile de gradul I sunt cel mai simplu de rezolvat. Dacă ne gândim puțin, vom găsi soluțiile celor trei: 7, căci 7 + 3 = 10, apoi 30, căci 30 : 2 = 15 și, în sfârșit, 5 x 2 - 10 = 0.

Dacă la aceste patru operații adăugăm ridicarea la pătrat, adică operația care constă în înmulțirea necunoscutei cu ea însăși, trecem la ecuațiile de gradul II, iar dificultatea acestora este mai mare. Exact aceste ecuații de gradul II sunt cele pe care al-Khw rizm le rezolvă în lucrarea sa. Iată câteva exemple pe care le tratează savantul persan:

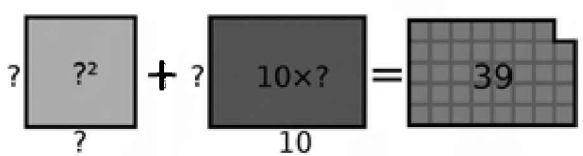
Pătratul unui număr plus douăzeci și unu este egal cu de zece ori acest număr.
Pătratul unui număr căruia îi adăugăm de zece ori acest număr dă treizeci și nouă.

Una dintre particularitățile ecuațiilor de gradul II constă în aceea că pot să aibă două soluții. Așa este cazul și aici: numerele 3 și 7 răspund la prima ecuație, deoarece 3 x 3 + 21 = 3 x 10 și 7 x 7 + 21 = 7 x 10. Și a doua ecuație are două soluții: 3 și -13.

În secolul al IX-lea tot geometria reprezintă disciplina de referință în matematică, iar demonstrațiile lui al-Khw rizm sunt formulate în mod sistematic în termeni geometrici. După interpretarea inițiată de oamenii de știință antici, pătratul unui număr și înmulțirea a două numere se pot reprezenta ca niste suprafețe. O ecuație de gradul II poate, deci, să fie tratată precum o problemă de geometrie plană. De exemplu, iată versiunile geometrice ale celor două ecuații precedente. Semnele de întrebare sunt lungimile care corespund numărului necunoscut.



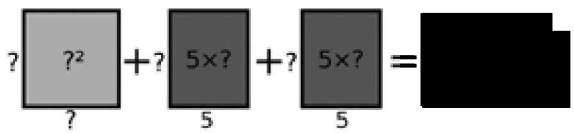
Pătratul unui număr plus douăzeci și unu este egal cu de zece ori acest număr.



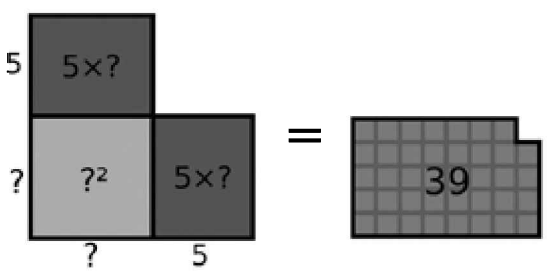
Pătratul unui număr căruia îi adăugăm de zece ori acest număr dă treizeci și nouă.

Al-Khw rizm rezolvă aceste probleme cu ajutorul metodei îmbunătățite a puzzle-ului. El decupează piesele, adaugă sau scoate bucăți în funcție de necesități, pentru a obține o figură care face să apară soluția.

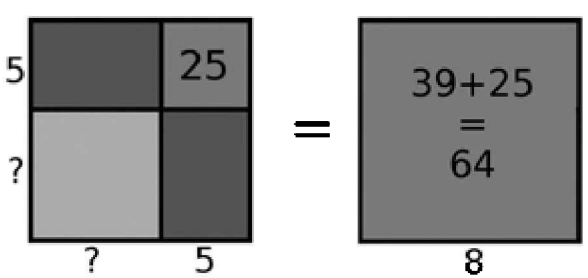
Să observăm, de exemplu, cea de-a doua ecuație, unde metoda începe prin decuparea dreptunghiului care reprezintă de 10 ori necunoscuta în două dreptunghiuri care au fiecare de 5 ori necunoscuta.



Apoi, el redispune piesele în felul următor:



În sfârșit, el adaugă celor două laturi ale egalității o piesă care are o suprafață de douăzeci și cinci, astfel încât să reconstituie pătratele de ambele părți.



Pătratul din stânga va avea o latură egală cu necunoscuta mărită de 5 ori, în timp ce cel din dreapta are o latură egală cu 8. Deducem că necunoscuta are valoarea 3.

Să remarcăm că figura precedentă este foarte grosier proporționată. Era imposibil să știm înaintea rezolvării sale că necunoscuta avea valoarea 3, iar lungimile reprezentate nu sunt corecte. Acest lucru nu are niciun fel de importanță, deoarece nu valorile numerice sunt cele care contează aici, ci faptul că același decupaj funcționează indiferent de numerele particulare care apar în aceste ecuații. O zicală pretinde că geometria este arta de a gândi corect asupra unor figuri false. Iată o ilustrare perfectă!

Totuși trebuie să notăm că, prin această metodă, necunoscuta este o lungime, adică un număr pozitiv. Soluțiile negative ne-ar întinde o capcană. În momentul în care ecuația are o soluție egală cu -13, al-Khw rizm o ocolește pur și simplu.

După gradul II urmează cel de-al III-lea. De astă dată este posibil să introducem cubul necunoscutei. Aceste ecuații sunt și mai complexe pentru al-Khw rizm și vor fi rezolvate abia în perioada Renașterii. Dacă le interpretăm în termeni geometrici, vom da peste o problemă a volumelor în trei dimensiuni.

Apoi urmează ecuațiile de gradul IV. Dintr-un punct de vedere numeric, aceste ecuații se pun fără nicio greutate, dar reprezentarea lor geometrică ne va trăda, căci ar trebui să ne imaginăm figuri în patru dimensiuni, lucru care nu este posibil în lumea noastră limitată la trei dimensiuni.

> Această capacitate a algebrei de a genera probleme care sunt *a priori* inaccesibile geometriei va fi în cea mai mare parte responsabilă de răsturnarea care se va produce în Renaștere, când prima îi va răpi celei de-a doua titlul de disciplină-regină a matematicii.

La sfârșitul secolului al IX-lea, matematicianul egiptean Abu Kamil este unul dintre principalii urmași ai lui al-Khw rizm . El va generaliza metodele savantului persan și se va interesa în mod special de sistemele de ecuații. Aceste sisteme constau în găsirea simultană a mai multor numere necunoscute, pornind de la mai multe ecuații. Iată un exemplu clasic:

> *Turma unui crescător de animale este alcătuită din dromaderi, care au o cocoașă, și din cămile, care au două cocoașe. Se pot număra în total 100 de capete și 130 de cocoașe. Câte animale există din fiecare categorie?*

Căutăm aici două necunoscute: numărul de dromaderi și cel de cămile, dar informațiile de care dispunem sunt amestecate. Capetele și cocoașele formează două ecuații, dar nu este posibil să le rezolvăm pe acestea în mod independent — este nevoie să luăm în considerare problema ca pe un întreg.

Pentru a aborda această problemă există mai multe metode. O modalitate de gândire este și următoarea: deoarece există 100 de capetele, există 100 de animale, dar, dacă n-ar fi existat decât dromaderi, am fi avut

100 de cocoașe și ar lipsi 30. Deci, există 30 de cămile și 70 de dromaderi. Avem aici o singură soluție, dar alte sisteme mai complexe pot avea mult mai multe. Astfel, Abu Kamil, într-una dintre lucrările sale, spune că a rezolvat unele ecuații pentru care a găsit 2 676 de soluții diferite.

În secolul al X-lea, Al Karaji este primul care a scris că se pot imagina ecuații de orice grad, chiar dacă situațiile figurilor pe care reușesc să le rezolve sunt relativ puține. În secolele al XI-lea și al XII-lea se va lansa asaltul asupra ecuațiilor de gradul III de către Omar Khayyam și Sharaf al-D n al-T s . Ei ajung să rezolve unele cazuri particulare și vor realiza descoperiri semnificative în studiul lor, fără a ajunge totuși să găsească o metodă sistematică de rezolvare. Multe alte tentative de acest fel vor eșua, iar câțiva matematicieni vor începe să invoce posibilitatea ca aceste ecuații să nu fie rezolvabile.

Până la urmă, nu savanții arabi vor fi cei care vor rezolva problema. În secolul al XIII-lea începe un declin lent al epocii de aur islamice care cunoscuse deja cei mai frumoși ani. Rațiunile acestui declin sunt multiple. Dominația Imperiului Arabo-Musulman stârnește poftele celorlalți și imperiul este deseori atacat atât pe plan comercial, cât și militar.

În 1219, hoardele mongole ale lui Ginghis Han invadează Khwarezmul natal al lui al-Khw rizm . În 1258 ele ajung la porțile Bagdadului sub comanda lui Hulagu Han, nepotul lui Ginghis. Califul al-Musta'sim este nevoit să capituleze. Bagdadul este prădat, incendiat, iar locuitorii

săi, masacrați. În aceeași epocă, Reconquista[1] teritoriilor din sudul Spaniei de către populațiile creștine se accentuează. Cordoba, capitala regiunii, va cădea în 1236. Spania este complet recucerită în 1492, cu preluarea Granadei și a palatului său, Alhambra.

Organizarea științifică a lumii arabe este suficient de descentralizată pentru a rezista un timp la aceste provocări. Cercetări de prim-plan vor continua să fie realizate până în secolul al XVI-lea, dar roata istoriei se învârte și Europa se pregătește să reia frâiele matematicii.

[1] *Recucerirea,* procesul prin care regatele creștine din nordul Hispaniei (Spania și Portugalia de astăzi) au recucerit Peninsula Iberică de la musulmani. *(N.r.)*

10

Șiruri

Trebuie să mărturisim că de-a lungul perioadei medievale matematica nu a avut un vânt prielnic în Europa. Totuși există câteva excepții. Cel mai mare matematician european al Evului Mediu este fără îndoială italianul Leonardo Fibonacci, născut în Pisa la 1175 și mort în 1250 în același oraș.

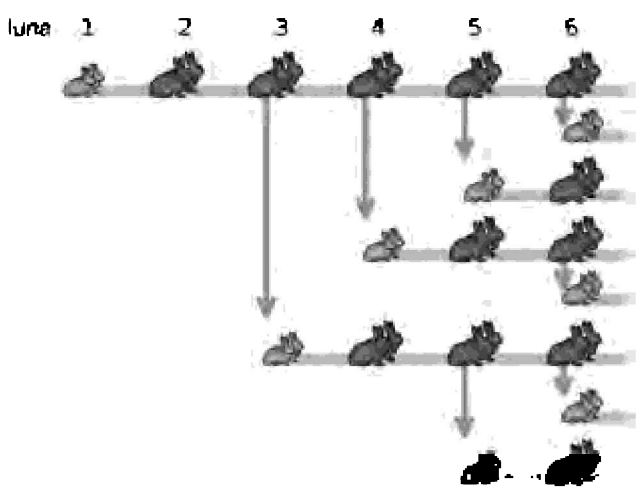
Cum putea el deveni un matematician important în această epocă în Europa? Nerămânând acolo! Tatăl lui Fibonacci era reprezentantul negustorilor din Republica Pisa la Bejaia, în Algeria de astăzi. Acolo își va primi savantul italian educația și va descoperi lucrările matematicienilor arabi, mai ales cele ale lui al-Khw rizm și Abu Kamil. Întors la Pisa, publică în 1202 *Liber Abaci (Cartea calculelor)* în care va prezenta o întreagă paletă a matematicilor din epocă, mergând de la cifrele arabe la geometria lui Euclid și trecând prin rezultatele aritmeticii lui Diophante sau ale calculelor de șiruri numerice. De altfel, unul dintre aceste șiruri va căpăta o mare popularitate în secolele care vor urma.

Un șir numeric este o succesiune de numere care se poate prelungi la infinit. Știm deja câteva astfel de șiruri. Avem șirul de numere impare (1, 3, 5, 7, 9...) sau acela

al numerelor pătrate (1, 4, 9, 16, 25…), care sunt printre cele mai simple astfel de exemple. Într-una dintre problemele prezente în *Liber Abaci*, Fibonacci încearcă să modeleze matematic evoluția unei crescătorii de iepuri. Pentru aceasta, el ia în considerare următoarele ipoteze simplificate:

1. *Un cuplu de iepuri nu se află la vârsta reproducerii în primele două luni de viață.*
2. *Începând cu cea de-a treia lună, un cuplu dă naștere unui nou cuplu în fiecare lună.*

Din aceste ipoteze este posibil să prezicem arborele descendenței unui tânăr cuplu de iepuri.



Fiecare linie reprezintă evoluția unui cuplu de iepuri de-a lungul timpului. Săgețile reprezintă nașterile.

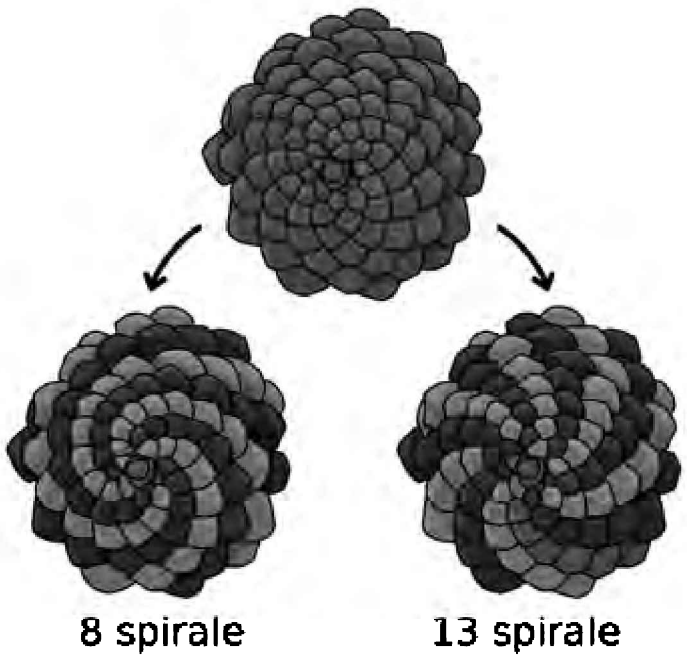
Se poate observa șirul format de numărul de cupluri de-a lungul timpului. Privind fiecare coloană, observăm că arborele precedent ne dă valorile primelor șase luni: 1, 1, 2, 3, 5, 8...

Fibonacci va observa că în fiecare lună populația de iepuri este egală cu suma celor două luni precedente: 1 + 1 = 2, 1 + 2 = 3, 2 + 3 = 5, 3 + 5 = 8... și așa mai departe. Această regulă se poate explica astfel: în fiecare lună, numărul de cupluri care se nasc și care, așadar, se adaugă la iepurii deja prezenți este egal cu numărul de cupluri ajunse la vârsta procreației din luna precedentă, adică se ajunge la numărul de cupluri care erau deja născute cu două luni înainte. Acum este posibil să calculăm termenii șirului fără să fie nevoie să detaliem cu precizie genealogia iepurilor.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144...

Pentru Fibonacci, această problemă este înainte de toate o enigmă recreativă. Totuși, șirul demografic al iepurilor își va găsi în secolele următoare numeroase aplicații atât practice, cât și teoretice.

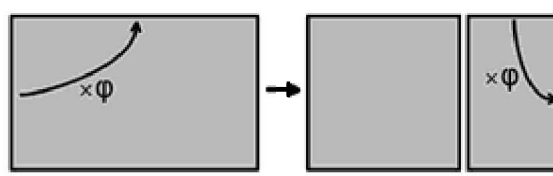
Unul dintre exemplele cele mai frapante este, fără îndoială, apariția sa în botanică. Filotaxia este disciplina care studiază felul în care frunzele sau diferitele elemente constitutive ale unei plante sunt așezate pe tulpină. Dacă observați un con de brad, veți constata că suprafața sa este alcătuită din solzi care se înfășoară în spirale. Mai exact, se poate calcula numărul de spirale care se înfășoară în sensul acelor de ceasornic și numărul de spirale care se răsucesc în sensul invers acelor de ceasornic.



Oricât de uimitor ar putea să pară, aceste două numere sunt întotdeauna doi termeni consecutivi ai șirului lui Fibonacci. De exemplu, plimbându-vă prin pădure, ați putea să găsiți conuri de brad de tipul 5–8, 8–13 sau 13–21, dar niciodată 6–9 și nici 8–11. Aceste spirale ale lui Fibonacci apar într-un mod mai mult sau mai puțin evident la foarte multe alte plante. Dacă pot fi vizibile pe fructul de ananas sau pe inflorescența de floarea-soarelui, ele sunt în schimb mult mai puțin vizibile în forma de buchet a conopidei. Cu toate astea, șirul se regăsește și aici.

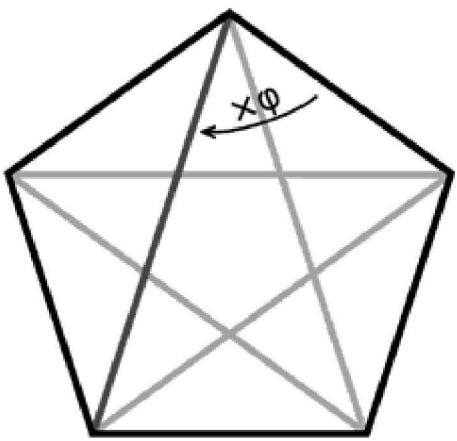
Numărul de aur

Printre alte curiozități, șirul lui Fibonacci ne va mai arăta și o legătură foarte strânsă cu un număr cunoscut încă din Antichitate: numărul de aur. Valoarea sa este aproximativ egală cu 1,618, iar grecii îl considerau a fi o proporție perfectă. Precum în cazul lui π, numărul de aur are o scriere zecimală infinită și de aceea i se dă un nume, adică φ, care se citește „fi".
Numărul de aur se declină în numeroase variante geometrice. Un dreptunghi de aur este un dreptunghi a cărui lungime este de φ ori mai mare decât lățimea. Proprietățile numărului de aur fac ca, dacă decupăm un pătrat din lățimea dreptunghiului, atunci dreptunghiul cel mic care rămâne este tot un dreptunghi de aur.



Grecii îl utilizau cu precădere în arhitectură. Fațada Parthenonului din Atena deține proporții foarte apropiate dreptunghiului de aur și, chiar dacă este greu să avem surse de încredere asupra intențiilor arhitecților, este foarte posibil ca aceste dimensiuni să nu fi fost alese la întâmplare. Primul text care definește în mod clar numărul de aur și care ne-a

parvenit până astăzi este *Cartea a VI-a* a *Elementelor* lui Euclid.
Numărul se poate regăsi și în pentagoanele regulate: diagonalele acestora și laturile lor se găsesc exact într-un raport de aur. Altfel spus, lungimea uneia dintre cele cinci diagonale este egală cu lungimea unei laturi, înmulțită cu φ.



Numărul de aur se regăsește astfel în toate structurile geometrice care conțin pentagoane. Așa cum am văzut, de exemplu, în cazul geodei sau a mingilor de fotbal, despre care am vorbit deja. Atunci când se încearcă bunăoară calcularea valorii sale exacte prin metode algebrice, ajungem la următoarea ecuație de gradul II.

Pătratul numărului de aur este egal cu numărul de aur mărit cu o unitate.

Metoda lui al-Khw rizm ne permite să-i găsim formula exactă. Astfel, avem $\varphi = (1+\sqrt{5}): 2 = 1{,}618034$[1]. Puteți să verificați că această valoare respectă întru totul enunțul ecuației: $1{,}618034 \times 1{,}618034 \approx 2{,}618034$.

Dar ce treabă are șirul lui Fibonacci cu această chestiune?

Dacă ne uităm la înmulțirea iepurilor suficient de mult timp, vom observa că în fiecare lună numărul lor este înmulțit cu aproximativ φ. De exemplu, să vedem ce se întâmplă în cea de-a cincea și a șasea lună. Populația trece de la 8 la 13 iepuri, deci ea s-a înmulțit cu $13 : 8 = 1{,}625$. Așadar, ceea ce am obținut nu este prea departe de numărul de aur, dar nici nu este exact numărul de aur. Dacă acum ne uităm la trecerea de la cea de-a unsprezecea la a douăsprezecea lună, populația s-a înmulțit cu $144 : 89 = 1{,}61797...$ Ne apropiem, deci! Și am putea să continuăm tot așa. Cu cât timpul trece, cu atât factorul de înmulțire de la o lună la alta se apropie de numărul de aur.

Odată ce am făcut această constatare, vine momentul întrebărilor. De ce? Cum se face că acest număr aparent inofensiv este prezent în trei domenii distincte ale matematicii: geometria, șirurile și algebra? La început, ne-am putea gândi că nu este vorba decât de trei numere apropiate, dar diferite. Însă nu este așa: oricât de precis am măsura diagonala

[1] Notația $\sqrt{5}$ din această formulă reprezintă rădăcina pătrată a cifrei 5, adică numărul pozitiv al cărui pătrat este egal cu 5. Acest număr are valoarea aproximativă de 2,236. *(N.a.)*

unui pentagon, oricât de fin am calcula $(1+\sqrt{5}) : 2$ și oricât de departe am merge în cadrul șirului lui Fibonacci, trebuie să recunoaștem că de fiecare dată avem de-a face cu același număr.
Pentru a răspunde la această întrebare, matematicienii sunt obligați să facă demonstrații mixte care aruncă punți între diferite ramuri ale matematicii. Acest fenomen, care exista deja între geometrie și algebră, datorită reprezentărilor desenate ale numerelor, în Antichitate, se va propaga și spre alte domenii matematice. Unele discipline care păreau până atunci îndepărtate unele față de altele încep să dialogheze. Numere precum φ, dincolo de interesul particular pe care îl stârnesc, se vor dovedi a fi extraordinari mediatori. Pe vremea lui Fibonacci, numărul π își limita câmpul de acțiune doar la geometrie. Cu toate acestea, el va deveni în secolele ce vor urma campionul tuturor categoriilor acestor numere-punți.

De asemenea, studiul șirurilor ne permite să aruncăm o nouă lumină asupra paradoxului lui Zenon din Elea și, mai ales, asupra aceluia cu Ahile și țestoasa. Sper că vă mai aduceți aminte de cursa imaginată de omul de știință grec: țestoasa începe cursa cu o sută de metri înaintea lui Ahile, dar acesta din urmă aleargă de două ori mai repede. În această situație, paradoxul părea să ne arate că, în ciuda lentorii sale, țestoasa nu ar putea fi niciodată depășită.

Această concluzie reieșea din împărțirea cursei într-o infinitate de etape. În momentul în care Ahile atingea

punctul de pornire al țestoasei, aceasta avansase deja 50 de metri. În timp ce Ahile parcurge acești 50 de metri, țestoasa mai înaintează 25 de metri și așa mai departe. Distanțele dintre cei doi alergători pe fiecare etapă formează un șir în care fiecare termen valorează jumătate din precedentul.

100 50 25 12,5 6,25 3,125 1,5625...

Șirul este infinit și aceasta este rațiunea pentru care putem să deducem în mod fals că Ahile nu va ajunge niciodată din urmă țestoasa. Totuși dacă adunăm această infinitate de numere, se poate găsi un rezultat care nu este deloc infinit.

$100 + 50 + 25 + 12{,}5 + 6{,}25 + 3{,}125 + 1{,}5625 + \ldots = 200.$

Aceasta este una dintre marile curiozități ale șirurilor: adunarea unei infinități de numere poate să fie finită! Suma precedentă ne arată că Ahile va depăși țestoasa după 200 de metri de alergat.[1]

Aceste adunări infinite se vor dovedi de o mare utilitate în calculul numerelor provenite din geometrie, precum acela al lui π sau ale raporturilor trigonometrice.

[1] Calculul sumei unei infinități de numere se face utilizând noțiunea de limită. Metoda constă în a trunchia suma, pentru a nu lua în considerare decât un număr finit de termeni. Apoi se adaugă din ce în ce mai mulți termeni, pentru a vedea de care număr-limită se pot apropia aceste sume parțiale. În cazul lui Ahile și al țestoasei, dacă nu privim decât primii șapte termeni, vom găsi numărul aproximativ 199,9998. Este posibil să demonstrăm că, adăugând din ce în ce mai mulți termeni, ne apropiem extraordinar de mult de 200. Așadar, suma infinită are valoarea de 200. *(N.a.)*

Dacă aceste numere nu sunt exprimabile cu ajutorul operațiilor elementare clasice, este posibil să le obținem prin însumarea șirurilor. Unul dintre primii care au explorat această posibilitate a fost matematicianul indian Madhava de Sangamagrama care a descoperit în jurul anului 1500 o formulă pentru numărul π:

$$\pi = \left(\frac{4}{1}\right) + \left(-\frac{4}{3}\right) + \left(\frac{4}{5}\right) + \left(-\frac{4}{7}\right) + \left(\frac{4}{9}\right) + \left(-\frac{4}{11}\right) + \left(\frac{4}{13}\right) + \cdots$$

Termenii șirului lui Madhava sunt alternativ pozitivi și negativi și se obțin împărțindu-l pe 4 la numerele impare succesive. Totuși nu trebuie să credem că această sumă rezolvă definitiv problema lui π. Odată adunarea realizată, trebuie să-i mai găsim și rezultatul. Or, dacă anumite însumări de șiruri, precum în cazul Ahile și țestoasa, pot fi ușor de calculat, în schimb, altele opun rezistență mai mare, precum în cazul șirului lui Madhava.

Pe scurt, această sumă infinită nu ne permite întru totul să oferim o scriere zecimală exactă a lui π, ci deschide noi porți pentru aproximări mai bune. Deoarece nu putem să adunăm dintr-odată o infinitate de termeni, ne putem totuși mulțumi cu un număr finit de termeni pe care îi luăm în considerare. Astfel, păstrând doar primii cinci termeni, obținem 3,34.

$$\left(\frac{4}{1}\right) + \left(-\frac{4}{3}\right) + \left(\frac{4}{5}\right) + \left(-\frac{4}{7}\right) + \left(\frac{4}{9}\right) \approx 3,34.$$

Nu este o foarte bună aproximare, dar nu contează, mergem mai departe. Dacă luăm primii o sută de termeni, ajungem la 3,13, iar apoi, dacă luăm un milion de termeni, vom obține 3,141592.

Cu siguranță că nu este foarte practic să adunăm un milion de termeni pentru a obține o aproximare de doar șase zecimale. Șirul lui Madhava are hiba unei convergențe foarte lente. Mai târziu, alți matematicieni, precum elvețianul Leonhard Euler, în secolul al XVIII-lea, sau indianul Srinivas Ramanujan, în secolul XX, vor descoperi o mulțime de alte șiruri a căror sumă este egală cu π şi care se apropie de el mult mai repede. Aceste metode vor înlocui treptat metoda lui Arhimede și vor permite calcularea a din ce în ce mai multor zecimale.

Rapoartele trigonometrice au și ele șirurile lor. De exemplu, cele necesare calculării sumei pentru obținerea cosinusului unui unghi dat.

$$\text{cosinus} = 1 - \frac{\text{unghi}^2}{1 \times 2} + \frac{\text{unghi}^4}{1 \times 2 \times 3 \times 4} - \frac{\text{unghi}^6}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} + \cdots$$

Pentru a găsi valoarea cosinusului este suficient să înlocuim cuvântul „unghi" printr-o măsură exactă a unui unghi anume[1]. Formule asemănătoare există pentru sinusuri, tangente, precum și pentru o mulțime de alte numere particulare apărute în diferite contexte.

[1] Pentru ca formula să funcționeze, trebuie să fim atenți, căci unghiul nu trebuie să fie măsurat în grade, ci în radiani. Cu această nouă unitate, un cerc nu mai are 3 600, ci 2π radiani. Acest lucru poate părea straniu, dar cu această unitate funcționează corect formulele trigonometrice, împreună cu șirurile care le sunt asociate. *(N.a.)*

Șirurile continuă să aibă astăzi o mulțime de aplicații. În șirul lui Fibonacci formulele sunt încă folosite în dinamica populațiilor pentru studierea evoluției speciilor animale de-a lungul timpului. Modelele actuale sunt totuși mult mai precise și țin cont de o multitudine de parametri, precum mortalitatea, prădătorii, climatul sau, în general, variabilitatea ecosistemelor în care trăiesc animalele. Mai bine spus, șirurile intervin în modelarea oricărui proces care evoluează etapă cu etapă de-a lungul timpului. Informatica, statistica, economia sau meteorologia sunt tot atâtea domenii care fac apel la șiruri.

11

Lumile imaginare

Începând cu secolul al XVI-lea, semințele sădite de Fibonacci încep să dea roade, odată cu apariția unei noi generații de matematicieni. Aceștia vor relua pe cont propriu cercetările algebrice începute de oamenii de știință arabi. Ei vor fi cei care în cele din urmă vor găsi soluțiile ecuațiilor de gradul III și vor face acest lucru în urma unei întâmplări incredibile.

La începutul secolul al XVI-lea, această poveste va debuta cu un om de afaceri și profesor de aritmetică de la Universitatea din Bologna, numit Scipione del Ferro. El e interesat de algebră și este primul care a descoperit formulele de rezolvare a ecuațiilor de gradul III. Dar din păcate, în această epocă, spiritul de difuzare a cunoștințelor care circulau în lumea arabă nu se manifesta și în Europa. Universitatea din Bologna scotea locuri la concurs în mod regulat pentru diferitele posturi de profesori. Pentru a rămâne cel mai bun și a-și păstra locul, Del Ferro avea interesul ca adversarii lui să nu-i cunoască secretul. El și-a scris descoperirea, dar nu a publicat-o, ci a arătat-o unui număr redus de discipoli care, ca şi el, i-au păstrat confidențialitatea.

Când matematicianul bolognez a murit, în 1526, comunitatea matematică italiană habar nu avea că ecuațiile

de gradul III fuseseră rezolvate. Mulți dintre ei continuau chiar să creadă că pur și simplu nu puteau fi rezolvate. Totuși unul dintre discipolii de încredere ai lui Del Ferro, Antonio Maria del Fiore, nu s-a putut abține să nu vorbească. A început să lanseze provocări celorlalți matematicieni din țară, provocări care constau în principal în rezolvarea ecuațiilor de gradul III. Bineînțeles că el câștiga de fiecare dată. Zvonul existenței unei soluții a început treptat să se răspândească.

În 1535, un savant venețian, Niccolo Fontana Tartaglia, a fost provocat de Del Fiore. Tartaglia avea pe atunci 35 de ani și nu publicase încă lucrări științifice importante. Del Fiore nu știa, deci, că se adresa celui care va deveni unul dintre cei mai buni matematicieni ai generației sale. Cei doi oameni de știință și-au adresat unul altuia o listă de treizeci de întrebări pentru o miză de treizeci de banchete oferite de învins pentru învingător. De-a lungul mai multor săptămâni, Tartaglia și-a bătut capul cu ecuațiile de gradul III trimise de Del Fiore și doar cu câteva zile înainte de data-limită a reușit la rândul său să găsească formulele. Apoi nu i-au mai trebuit decât câteva ore să rezolve cele treizeci de ecuații și să răspundă astfel provocării.

Povestea s-ar fi putut opri aici, doar că Tartaglia a refuzat la rândul său să-și prezinte metoda publicului, iar situația a rămas așa încă patru ani.

În momentul acesta povestea a ajuns la urechile unui matematician și inginer din Milano, numit Girolamo Cardano. Fără îndoială că numele lui franțuzit de Jérôme Cardan va suna cunoscut în urechile amatorilor de

mecanică; el este, printre altele, inventatorul arborelui cardanic, cel care la mașinile noastre transmite rotația motorului până la roți. Până în acel moment Cardano făcea parte dintre cei care credeau că rezolvarea ecuațiilor de gradul III este imposibilă. Intrigat de provocarea câștigată de Tartaglia, el va încerca să se apropie de acesta din urmă. La începutul lui 1539 i-a trimis opt probleme pentru a fi rezolvate și i-a cerut să-i transmită metoda sa de lucru. Tartaglia va refuza în mod categoric să facă acest lucru. Omul de știință milanez s-a supărat și atunci a încercat o manevră de intimidare, apelând la grupul de algebriști din țară ca să sancționeze aroganța colegului lor, dar Tartaglia nu a cedat.

Până la urmă, Cardano și-a atins scopul printr-un șiretlic. L-a făcut pe Tartaglia să creadă că marchizul de Alvaos, guvernatorul orașului Milano, dorea să-l întâlnească. Aflat la Veneția, Tartaglia se găsea în perioada respectivă într-o situație precară și avea nevoie de un protector. El a acceptat să meargă la Milano, unde întrevederea era prevăzută pentru data de 15 martie 1539, chiar în casa lui Cardano. Tartaglia l-a așteptat degeaba pe guvernator, timp de trei zile. Această perioadă a fost suficientă pentru Cardano să-și ducă până la capăt planul malefic. În urma unor negocieri neobosite, Tartaglia va ceda, cu condiția ca Girolamo Cardano să jure că nu-i va publica niciodată metoda. Odată jurămintele făcute, formulele au fost dezvăluite.

Cardano a început să disece formulele. Metoda funcționa de minune, dar îi lipsea un lucru — demonstrația. Până atunci, niciun matematician implicat în rezolvarea

acestor ecuații nu reușise să dovedească, în mod riguros, că formulele funcționează perfect în toate cazurile. Cardano s-a înhămat la această sarcină pentru anii care au urmat. El a reușit să le demonstreze, iar unul dintre elevii săi, Ludovico Ferrari, a reușit chiar să generalizeze metoda și pentru ecuațiile de gradul IV. Dar, constrânși de jurământul de la Milano, cei doi matematicieni nu-și puteau publica rezultatele.

Totuși Cardano nu va renunța la această idee. În 1542 el merge la Bologna împreună cu Ferrari pentru a-l întâlni pe Hannibale della Nave, un alt vechi discipol al lui Scipione del Ferro. În trei, ei au reușit să pună mâna pe vechile notițe ale acestuia din urmă și au constatat că Scipione a fost primul care a găsit formulele. Din acel moment Cardano s-a considerat eliberat de jurământul său. În 1547 el va publica *Ars Magna* sau *Marea artă,* o lucrare care va arăta lumii metoda de rezolvare a ecuațiilor de gradul III. Furios, Tartaglia îl va insulta violent pe Cardano și își va publica propria versiune a întâmplării. Prea târziu! Cardano a devenit în ochii lumii cel care a învins ecuațiile de gradul III, iar astăzi metoda este cunoscută sub numele de formula lui Cardan.

Câteva detalii din *Ars Magna* vor trezi totuși un anumit scepticism în rândurile algebriștilor epocii. În mai multe cazuri, formulele lui Cardan par să aibă nevoie de calculul rădăcinilor pătrate ale numerelor negative. De exemplu, în rezolvarea unor ecuații, poate să apară rădăcina pătrată a lui -15, care prin definiție trebuie să fie un număr al cărui pătrat să aibă valoarea -15. Dar acest lucru este absolut imposibil, în virtutea regulii semnelor

consacrate. Pătratul unui număr pozitiv este pozitiv, iar pătratul unui număr negativ este, de asemenea, pozitiv. De exemplu, (-2) 2 = (-2) x (-2) = 4. Niciun număr înmulțit cu el însuși nu poate să dea -15. Pe scurt, rădăcinile pătrate care apar în calculul acestor soluții pur și simplu nu există. Da, numai că, utilizând aceste numere inexistente ca etape intermediare, metoda lui Cardan ajunge totuși să găsească un rezultat corect. Acest lucru este uimitor și straniu.

Un alt matematician din Bologna, Rafael Bombelli, se va apleca asupra acestei probleme și va sugera că rădăcinile pătrate ale cantităților negative ar putea foarte bine să reprezinte o nouă specie de numere. Adică acestea să nu fie nici pozitive, nici negative. Este vorba despre numere care au o natură ciudată și inedită și nimic până astăzi nu ar fi făcut să le bănuim existența. După apariția lui zero și a numerelor negative, marea familie a numerelor se găsește din nou pe punctul de a se mări.

Spre sfârșitul vieții, Bombelli va scrie opera sa majoră, *Algebra Opera*, pe care o va publica în anul morții sale, în 1572. El reia aici descoperirile din *Ars Magna* și introduce aceste noi specimene pe care le numește „numere sofisticate". Bombelli va face pentru ele ceea ce Brahmagupta a făcut cu numerele negative pe vremea sa. El realizează un ansamblu de reguli de calcul care pun în ordine numerele sofisticate și care conduc în mod exact spre acceptarea faptului că se pot obține numere negative prin ridicarea la pătrat.

Numerele sofisticate ale lui Bombelli au un destin asemănător cu acela al numerelor negative. Și acestea vor da naștere unui lot de matematicieni sceptici și increduli.

Totuși și ele vor ajunge să se impună cu putere și să revoluționeze lumea matematicii. Printre scepticii convertiți, îl regăsim la începutul secolului al XVII-lea pe matematicianul și filosoful francez René Descartes, care va da acestor numere nou-sosite numele sub care le cunoaștem și astăzi: „numere imaginare".

Va fi nevoie să treacă încă două secole până ca numerele imaginare să fie pe deplin acceptate de întreaga comunitate matematică. De acum încolo, ele vor fi de neocolit în știința modernă. Dincolo de ecuații, aceste numere își vor găsi numeroase aplicații în științele naturii, mai exact în studiul tuturor fenomenelor ondulatorii pe care le întâlnim, de exemplu, în electronică sau în fizica cuantică. Fără acestea, multe inovații tehnologice moderne nu ar fi fost posibile.

Totuși, contrar numerelor negative, cele imaginare rămân necunoscute pentru foarte mulți din afara cercurilor științifice. Ele sunt contraintuitive, dificil de conceput și nu reprezintă fenomenele fizice simple. Dacă numerele negative puteau încă să fie înțelese ca niște datorii sau ca lipsuri, cu numerele imaginare trebuie să renunțăm definitiv la a mai gândi numerele ca pe niște cantități. Este imposibil să le dăm un sens aplicabil în viața de zi cu zi și să numărăm cu ele mere sau oi.

Numerele imaginare vor contribui treptat la debarasarea matematicienilor de ultimele complexe. Înainte de toate, dacă este suficient să acceptăm existența rădăcinilor pătrate negative pentru a crea o nouă specie de numere, de ce nu am putea să mergem și mai departe? Nu ar fi posibil să adăugăm după bunul plac noi numere,

cu condiția de a preciza proprietățile lor aritmetice? Nu am putea, oare, să inventăm chiar noi structuri algebrice, total independente de numerele clasice?

În secolul al XIX-lea au fost abolite până și ultimele idei *a priori* care mai existau în legătură cu ceea ce sunt numerele. De acum încolo, o structură algebrică devine o simplă construcție matematică alcătuită din elemente (care pot fi numite numere în anumite contexte, dar nu întotdeauna) și operații pe care le putem face cu aceste elemente (pe care le putem numi adunare, înmulțire etc. în anumite contexte, dar nu întotdeauna).

Această nouă libertate va da naștere unei formidabile explozii creatoare. Noi structuri algebrice, mai mult sau mai puțin abstracte, sunt descoperite, studiate și clasificate. În fața acestei ample acțiuni, matematicienii europeni și apoi ai lumii întregi se organizează, fac schimburi de idei și colaborează. Chiar și astăzi numeroase cercetări algebrice continuă să fie realizate în întreaga lume și numeroase conjecturi așteaptă să fie demonstrate.

Inventați-vă propria teorie matematică!

Visați cumva să aveți o teoremă care să vă poarte numele, precum în cazul lui Pitagora, Brahmagupta sau Al Kashi? Ei bine, vă propun acum să creați și să studiați propria dumneavoastră structură algebrică. Pentru acest lucru aveți nevoie de două ingrediente: o listă de elemente și o operație care să permită compunerea acestora.

De exemplu, să luăm opt elemente, pe care le vom nota cu simbolurile următoare: ♥, ♦, ♣, ♠, ♪, ♫, ▲ și ☼. Mai avem nevoie de încă un semn pentru operația noastră, iar pentru acest lucru să-l luăm, de exemplu, pe ✳, iar ca omagiu adus savantului italian, o vom numi „operația de bombelliație". Pentru a determina rezultatul bombelliației a două elemente, trebuie acum să stabilim un tabel al acestei operații. Să desenăm un tabel de opt linii și opt coloane corespunzătoare celor opt elemente și să le umplem după bunul plac, punând fiecare element în fiecare căsuță.

✳	♥	♦	♣	♠	♪	♫	▲	☼
♥	♥	♪	☼	♪	♣	♫	♥	♥
♦	♦	♦	♫	☼	♣	☼	♥	♦
♣	♦	♫	♣	♣	♪	♥	☼	♣
♠	☼	♪	▲	♠	♣	♦	▲	♠
♪	♥	▲	♫	♥	♪	♫	☼	♪
♫	▲	♥	♪	♣	♦	♫	☼	♫
▲	☼	♣	☼	♦	♪	♦	▲	▲
☼	♥	♦	♣	♠	♪	♫	▲	☼

Iată că teoria dumneavoastră este gata; nu ne mai rămâne decât să o studiem. Dacă privim la cea de-a doua linie și la cea de-a patra coloană, vom putea

observa, de exemplu, că dacă bombellizăm ♦ cu ♠ se obține ☼. Altfel spus ♦✳♠ = ☼. În teoria dumneavoastră veți putea să rezolvați chiar și ecuații. Iată una dintre acestea:

Găsiți un număr care să dea ♫ dacă se bombellizează cu ♣.

Pentru a găsi eventualele soluții, este suficient să aruncăm o privire în tabelul nostru. Vom constata că există două soluții: ♦ și ♪, căci ♦✳♣ = ♫ şi ♪✳♣ = ♫. Trebuie totuși să avem grijă, căci în noua noastră teorie unele proprietăți cu care suntem obișnuiți pot să devină false. De exemplu, rezultatul poate să nu fie același, conform ordinii în care se bombellizează două elemente: ♥✳♦ = ♪, în timp ce ♦✳♥ = ♦. Se spune în cazul acesta că operația nu este comutativă.

Cu un pic de atenție ați putea totuși să descoperiți câteva proprietăți cu un grad mai mare de generalitate. De exemplu, bombellizând un element cu el însuși dăm întotdeauna peste el: ♥✳♥ = ♥, ♦✳♦ = ♦, ♣✳♣=♣ și așa mai departe. Acest rezultat merită în totalitate titlul de primă teoremă a teoriei noastre.

Pe scurt, ați înțeles principiul! Dacă doriți să realizați propriile teoreme, atunci nimic nu vă oprește. Bineînțeles că puteți să luați oricât de multe elemente doriți, chiar și o infinitate, dacă acest lucru vă tentează. Puteți să definiți aceste notații mai complex, așa cum este cazul pentru numerele

întregi care nu au fiecare propriul simbol, ci se scriu cu ajutorul celor zece cifre indiene. Apoi ați putea să-i adăugați regulile de calcul care vor servi drept axiome ale teoriei dumneavoastră. De exemplu, este posibil să anunțați în definirea structurii algebrice care vă aparține că operația este comutativă.

Nu trebuie totuși să ne mințim, căci procedând astfel aveți puține șanse ca teoria dumneavoastră să rămână posterității. Nu toate modelele matematice sunt egale! Unele sunt mai utile și mai importante decât altele. Creând la întâmplare propriul tabel de operații, există posibilitatea ca acesta să fie neinteresant. Iar dacă nu a fost niciodată expus, ar exista totuși șanse ca un alt matematician să-l fi studiat deja înaintea dumneavoastră, deoarece, ei bine, nu trebuie să exagerăm; a fi matematician este o meserie în sine!

Cum poate fi recunoscută o teorie interesantă? De-a lungul istoriei au existat, în principal, două criterii care i-au ghidat pe matematicieni în explorările lor. Primul este utilitatea, iar al doilea este frumusețea.

Utilitatea este fără îndoială cel mai evident element. Rațiunea primă a matematicii constă în a găsi lucruri care să servească la ceva. Numerele sunt utile, căci permit să numărăm și să facem comerț, geometria ne permite să măsurăm lumea, iar algebra ne ajută să rezolvăm problemele vieții cotidiene.

În ceea ce privește frumusețea, ea poate părea un criteriu mai imprecis și mai puțin obiectiv. Cum e posibil

ca o teorie matematică să fie frumoasă? Am putea să înțelegem acest lucru în cazul geometriei, unde anumite figuri pot fi apreciate vizual, precum niște opere de artă. În situația aceasta se află frizele mesopotamiene, solidele lui Platon sau pavajele din Alhambra. Dar în algebră? O structură algebrică poate fi cu adevărat frumoasă?

Mult timp am crezut că privilegiul de a fi atins de eleganța sau de poezia obiectelor matematice era destinat specialiștilor sau unor amatori norocoși, adică celor care au petrecut suficient de mult timp studiind, disecând și digerând teoriile până în detaliu. Sau celor care au dezvoltat cu ajutorul conceptelor abstracte o intimitate strânsă și profundă pe care doar ei o puteau simți. Nu aveam dreptate și am avut ocazia de nenumărate ori să constat că eleganța matematicii poate fi sesizată și de neofiți, ba chiar și de copiii foarte mici.

Unul dintre exemplele cele mai izbitoare mi s-a revelat într-o zi în care animam atelierul de cercetare împreună cu clasa a doua de la o școală. Copiii, în jur de 7 ani, aveau ca sarcină să lucreze cu triunghiuri, pătrate, dreptunghiuri, pentagoane, hexagoane și multe alte forme, pe care trebuiau să le trieze conform unor criterii liber alese. S-a observat că pentru fiecare dintre aceste figuri putem să numărăm câte laturi și câte vârfuri există. Triunghiurile au 3 laturi și 3 vârfuri, pătratele sau dreptunghiurile au 4 laturi și 4 vârfuri și așa mai departe. Realizând această listă, copiii au formulat rapid o teoremă. Un poligon are întotdeauna tot atâtea laturi câte vârfuri.

Săptămâna următoare, pentru a-i provoca, am adus în discuție figurile neregulate, dintre care una avea forma următoare:

Se pune, așadar, întrebarea: câte laturi și câte vârfuri există aici? Și iată că majoritatea clasei răspunde: 4 laturi și 3 vârfuri. Acest unghi inversat din josul figurii nu are o formă de vârf, adică nu este ascuțit. Nu se poate rostogoli figura peste el. Este mai degrabă o scobitură decât o umflătură a figurii. Pe scurt, acest unghi care intră în figură nu făcea parte din ideea prealabilă pe care copiii și-o făcuseră despre ce este acela un vârf. Dacă le-aș fi cerut să numească acest punct „vârf" ar fi însemnat că le cer să dea același nume unor lucruri diferite. Ce idee stranie! Discuțiile s-au încins. Niciun copil nu este de acord cu statutul acestui nou punct. Ar trebui să-i dăm, oare, un alt nume, ar trebui să-l ignorăm complet? Există argumente pro și contra, dar, în general, niciunul nu părea să convingă pe majoritatea dintre ei.

Apoi, dintr-odată, un copil și-a adus aminte de teoremă. Dacă acesta nu este un vârf, nu mai putem spune că orice poligon are tot atâtea laturi câte vârfuri. Spre marea mea uimire, acest argument a fost cel care într-o clipă a făcut ca întreaga clasă să-și schimbe părerea. În câteva secunde toată lumea era de acord: trebuia ca acest punct să capete numele de vârf. Trebuia să fie salvată teorema, chiar cu prețul prejudecăților noastre. Ar fi fost păcat ca acest enunț atât de simplu și limpede să fi avut excepții. Iată cea mai precoce manifestare a eleganței matematicii la care am putut fi martor.

„Excepțiile" nu sunt frumoase. Ele ne rănesc sentimentele. Cu cât un enunț este mai simplu și aplicabilitatea sa mai mare, cu atât ne dă impresia că putem să atingem cu degetul ceva cu adevărat profund. Frumusețea în matematică poate căpăta diverse forme, care se manifestă prin acest raport tulburător al complexității obiectelor studiate cu ajutorul formulărilor cât mai simple. O teorie frumoasă este o teorie economă, fără resturi, fără excepții arbitrare și deosebiri inutile. Este o teorie care spune multe cu puține vorbe, care fixează esențialul în câteva cuvinte, care merge direct la țintă.

Dacă exemplul poligoanelor rămâne elementar, această impresie de eleganță nu face nimic altceva decât să crească, pe măsură ce teoriile se dezvoltă, păstrând în același timp o ordine care se reduce la câteva reguli simple. Este tulburător când o nouă teorie, pe care am putea s-o gândim într-un mod mai complex decât pe una veche, se dovedește, în realitate, a fi mult mai precisă și armonioasă. Numerele imaginare reprezintă o astfel de ilustrare perfectă.

Să ne aducem aminte de ecuațiile de gradul II: conform metodei lui al-Khw rizm , se putea ca aceste ecuații să aibă două soluții. Dar se putea, în egală măsură, ca acestea să nu aibă decât una singură sau chiar nicio soluție. Acest lucru este valabil dacă luăm în considerare numai soluții care nu implică numere imaginare. Dacă se ține cont de acestea din urmă, regula se simplifică în mod considerabil: toate ecuațiile de gradul II au două soluții. Atunci când al-Khw rizm pretindea că o ecuație nu avea soluție, spunea acest lucru deoarece era pur și simplu blocat într-un ansamblu prea restrâns de numere. Dar cele două soluții erau imaginare.

Mai mult decât atât, datorită acestor numere imaginare, toate ecuațiile de gradul III au trei soluții, cele de gradul IV au patru soluții și așa mai departe. Pe scurt, regula este următoarea: o ecuație are tot atâtea soluții câte indică gradul său. Acest rezultat a fost conjecturat în secolul al XVIII-lea, înainte de a fi demonstrat la începutul secolului al XIX-lea de matematicianul german Carl Friedrich Gauss. Se numeşte astăzi teorema fundamentală a algebrei.

După mai mult de o mie de ani de la tratatul lui al-Khw rizm , după toate piedicile puse de ecuațiile de gradul III, după dificultățile conceperii ecuațiilor de mai mult de gradul IV fără a recurge la o reprezentare geometrică, cine ar fi putut să creadă că totul se va sfârși printr-o simplă regulă alcătuită din zece cuvinte? O ecuație are tot atâtea soluții câte indică gradul său.

Iată minunea numerelor imaginare! Și ecuațiile nu sunt singurele care profită de acestea. În lumea imaginară,

multe teoreme se enunță brusc, cu o concizie și o eleganță care ne taie răsuflarea. Toate piesele puzzle-ului matematic par să se îmbine de minune. Probabil că Bombelli nu se îndoia de faptul că prin legitimarea numerelor sale „sofisticate" deschidea timid poarta unui adevărat paradis pentru generații întregi de matematicieni.

Matematicienii caută acest gen de proprietăți și în cadrul structurilor algebrice care vor lua naștere în secolul al XIX-lea. Este vorba despre reguli generale, simetrii, analogii, rezultate care se înlănțuie și se completează perfect. Mica teorie pe care am inventat-o mai sus este foarte departe de respectarea acestor criterii pentru a deveni interesantă. Ea este perfect aleatorie și absolut totul în cadrul său este doar un caz particular. Nu există reguli generale asupra ecuațiilor, nici asupra proprietăților operațiilor lor. Păcat!

Unul dintre marile nume din algebra modernă este acela al francezului Évariste Galois, un geniu precoce care a murit la vârsta de 21 ani, în 1832, în urma unui duel, și care, în scurta sa existență, și-a găsit totuși timp pentru a pune o piatră la edificiul istoriei ecuațiilor. Galois a reușit să dovedească faptul că dincolo de gradul V soluțiile anumitor ecuații nu mai puteau fi calculate cu ajutorul formulelor similare cu cele ale lui al-Khw rizm sau cele ale lui Cardan, care nu utilizau decât cele patru operații, plus ridicarea la putere și radicalii. Pentru a ajunge la demonstrația sa extraordinară, el a creat noi structuri algebrice care continuă să fie studiate și azi sub numele de grupuri Galois.

Dar cea mai prolifică în arta de a deduce rezultate algebrice pornind de la un număr restrâns de axiome, este matematiciana germană Emmy Noether. Din 1907 până la moartea sa, în 1935, Noether a publicat aproape cincizeci de articole de algebră, dintre care unele vor revoluționa disciplina prin alegerea structurilor algebrice și ale teoremelor pe care le-a dedus. Ea a studiat în principal ceea ce azi numim inele, corpuri și algebre[1], adică structuri care posedă trei, patru și respectiv cinci operații legate între ele prin proprietăți bine determinate.

Cu acest pas, putem spune că algebra a intrat în sfera abstracțiilor atât de înalte, încât modesta carte pe care o aveți în mână trebuie să cedeze locul cursurilor universitare și lucrărilor academice.

[1] Cuvântul „algebră" semnifică totodată disciplina ca întreg, dar și un tip particular de structură algebrică. *(N.a.)*

12

Un limbaj pentru matematică

Europa fierbea în secolul al XVI-lea. Renașterea a depășit granițele Italiei și a inundat întregul continent. Invențiile se țin lanț, iar descoperirile sporesc. La vest, dincolo de Atlantic, vasele spaniole descoperă o nouă lume, iar în timp ce exploratorii se îndreaptă spre aceste noi teritorii din ce în ce mai numeroase, în căutare de ținuturi îndepărtate, intelectualii umaniști, în bibliotecile lor, se întorc în timp și redescoperă marile texte ale Antichității. Tradițiile sunt bulversate până și pe plan religios. Reforma protestantă, aflată sub conducerea lui Martin Luther și a lui Jean Calvin, cunoaște un succes răsunător, iar războaiele religioase se vor răspândi în a doua jumătate a secolului.

Propagarea acestor idei novatoare este susținută în mod deosebit prin apariția unei noi invenții puse la punct în 1450 de către germanul Johannes Gutenberg: tiparul cu caractere mobile. Datorită acestui procedeu, acum este posibil să fie imprimate foarte repede numeroase exemplare ale unei cărți și să fie difuzate la scară largă. Începând cu 1482, *Elementele* lui Euclid a fost prima lucrare matematică ieșită din tipar la Veneția. Procedeul cunoaște un succes fulminant! La începutul secolului al XVI-lea, mai multe sute de orașe dețineau

propria tiparniță și zeci de mii de lucrări erau deja tipărite.

Științele devin o parte activă în cadrul acestor procese bulversante. În 1543, astronomul polonez Nicolas Copernic publică *De Revolutionibus Orbium Coelestium (Despre revoluțiile sferelor celeste)*. Cartea a constituit o lovitură de grație. Cu o singură mișcare, a reușit să mătură întregul sistem astronomic al lui Ptolemeu, el afirmând că Pământul este cel care se învârte în jurul Soarelui și nu invers. În anii care au urmat, Giordano Bruno, Johannes Kepler sau Galileo Galilei îi vor călca pe urme, impunând heliocentrismul ca nou model cosmologic de referință. Această revoluție nu va duce lipsă de savanți care vor fi atrași de ea, stârnind fulgerele Bisericii Catolice care, după o perioadă în care a încurajat dezvoltarea științelor, se va găsi într-o postură nefavorabilă în momentul în care dogmele încep să fie respinse. Dacă Nicolas Copernic a avut prezența de spirit să nu-și publice lucrările decât cu puțin timp înaintea morții, în schimb, Bruno a fost ars pe rug în piața publică la Roma, iar Galilei a fost constrâns să-și renege lucrările în fața tribunalului Inchiziției. Legenda spune că, ieșind din sala de proces, omul de știință italian a murmurat aceste patru cuvinte devenite celebre: *E pur si muove*! Și totuși se învârte!

Matematica urmează această mișcare culturală și va ajunge treptat în marile regate ale vestului european, în special în Franța.

Desigur, matematica mai fusese practicată pe teritoriul francez înainte de această perioadă. Galii aveau

propriul sistem de numerotare, în baza douăzeci, din care mai păstrăm până astăzi denumirea pe care o dăm numărului 80[1]. Romanii au ocupat Galia cu toate că nu erau mari matematicieni, dar mânuiau suficient de bine cifrele pentru a administra în mod eficient imensul lor imperiu. La fel au stat lucrurile și cu francii, merovinginenii, carolingienii și capețienii care s-au succedat unii după alții de-a lungul Evului Mediu. Până acum niciodată Franța nu a avut matematicieni de prim rang. Niciodată până în acest moment nu s-au descoperit pe teritoriul Hexagonului teoreme sau rezultate importante care să nu fi fost deja descoperite în alte părți ale lumii.

Deoarece matematica a debarcat în Franța, avem ocazia să plecăm la drum. Direcția: Vendée. În vestul țării mă întâlnesc astăzi cu primul mare matematician francez al Renașterii: François Viète. Satul Foussais-Payré, aflat la doisprezece kilometri de Fontenay-le-Comte, este încărcat de istorie. Primele urme de ocupație ale sitului datează din epoca galo-romană, dar numai începând cu Renașterea localitatea va cunoaște o perioadă de mare prosperitate. Artizanii și negustorii vin aici în număr foarte mare ca să-și dezvolte afacerile înfloritoare. Se face comerț cu lână, in și piei, care conduce la un renume ce se răspândește în cele patru colțuri ale regatului. Chiar și astăzi puteți observa numeroase edificii ce datează din acele vremuri și care s-au conservat în mod remarcabil. Cu aproximativ o mie de

[1] Francezii spun la 80 „quatre-vingts" (20 de 4 ori). *(N.t.)*

locuitori, satul are nu mai puțin de patru construcții considerate monumente istorice, precum și numeroase alte clădiri vechi.

În nordul satului întâlnim așa-numitul loc La Bigotière, adică vechea fermă pe care François Viète a moștenit-o de la tatăl său și care i-a adus titlul de Seigneur de La Bigotière. Pe strada centrală se găsește hanul Sainte-Catherine, adică vechea proprietate a familiei în care Viète adora să-și petreacă timpul în adolescență. Pentru mine este foarte emoționant să merg printre aceste ziduri care l-au văzut crescând pe primul mare matematician al Franței. Fără îndoială că tânărul François și-a petrecut multe seri de iarnă într-un colț lângă acest imens șemineu care tronează în mijlocul sălii principale, astăzi transformată într-o sală de restaurant. Oare la căldura acestui foc au luat naștere primele idei ale gândirii sale matematice?

Viète nu va rămâne toată viața la Foussais-Payré. După ce a studiat Dreptul la Poitiers, el a călătorit la Lyon unde a fost prezentat regelui Charles IX, apoi a petrecut câtva timp în La Rochelle înainte de a pleca să se stabilească la Paris.

Războaiele religioase atingeau apogeul în acea perioadă. Chiar și în familia lui François s-a produs o separare cu privire la problema religioasă: tatăl său, Étienne Viète, se convertise la protestantism, în timp ce doi unchi de-ai săi au rămas catolici. François rămâne indiferent la aceste dezbateri și nu-și va dezvălui niciodată convingerile profunde. A fost, pe rând, avocat al marilor familii protestante, precum și mare demnitar al regatului. Aceste tatonări au făcut să nu fie mereu văzut cu ochi buni și de

aceea a trecut de mai multe ori prin perioade de dizgrație. În timpul nopții de Sfântul Bartolomeu[1], în 1572, el se află la Paris, dar izbutește să scape de masacru. Nu toți au avut norocul lui. Pierre de La Ramée, primul care a introdus matematica la Universitatea de la Paris și ale cărui lucrări au avut o influență imensă asupra lui Viète, a fost asasinat pe 26 august.

În paralel cu sarcinile oficiale, Viète practică matematica, însă cu titlu de amator. El îi cunoaște bine pe Euclid, Arhimede și pe oamenii de știință ai Antichității pe care Renașterea îi redescoperă. Se interesează totodată și de oamenii de știință italieni și este unul dintre primii care au citit *Algebra Opera* a lui Bombelli, a cărei publicare trecuse aproape neobservată în vremea aceea. Matematicianul francez se va poziționa totuși de partea dubitativilor în ceea ce privește introducerea numerelor sofisticate. De-a lungul întregii sale vieți, Viète își va publica operele matematice pe propria-i cheltuială și le va oferi doar celor pe care el îi consideră demni de a le citi. Este interesat de astronomie, trigonometrie sau criptografie.

În 1591, Viète va publica ceea ce va deveni opera sa principală: *In artem analyticem isagoge (Introducere în arta analitică)* adesea cunoscută sub numele de *Isagoge*. În mod ciudat, lucrarea va fi cunoscută nu pentru teoremele sau demonstrațiile sale matematice, ci pentru modalitatea în care sunt formulate rezultatele. Viète va fi principalul susținător al noii algebre care va conduce

[1] Masacru comis asupra protestanților din Franța, declanșat de puterea de stat în noaptea dintre 23 și 24 august 1572 și soldat cu moartea a aproape 30 000 de hughenoți. *(N.r.)*

la nașterea unui limbaj matematic cu totul nou, în doar câteva decenii.

Pentru a înțelege demersul său, trebuie să ne întoarcem la lucrările matematice ale vremurilor de dinainte. Dacă teoremele geometrice ale lui Euclid sau metodele algebrice ale lui al-Khw rizm sunt foarte utile și azi, modalitatea în care acestea sunt prezentate s-a schimbat în mod radical. Oamenii de știință din vechime nu dețineau limbajul specific pentru a scrie matematica. Toate simbolurile care ne sunt atât de familiare astăzi, precum cele utilizate pentru desemnarea celor patru operații elementare, +, -, x și :, au fost inventate abia în Renaștere. De-a lungul a aproape cinci mii de ani, plecând de la mesopotamieni spre arabi și ajungând la greci, chinezi și indieni, formulele matematice s-au cuibărit în vocabularul curent al limbilor în care acestea au fost scrise.

Astfel, cărțile lui al-Khw rizm și ale algebriștilor din Bagdad sunt scrise în întregime în limba arabă, nefolosind niciun simbolism. În aceste lucrări, unele raționamente puteau așadar să se întindă pe mai multe pagini, în timp ce în zilele noastre ar fi nevoie de doar câteva rânduri pentru a exprima același lucru. Să ne aducem aminte de ecuația de gradul II prezentată în al său *Al-Jabr*:

> *Pătratul unui număr plus douăzeci și unu este egal cu de zece ori acest număr.*

Iată modalitatea în care al-Khw rizm își detaliază rezolvarea:

Pătratele și Numerele sunt egale cu Rădăcinile; de exemplu, „Un pătrat și douăzeci și unu în numere sunt egale cu zece rădăcini ale aceluiași pătrat". Altfel spus, care trebuie să fie cantitatea unui pătrat care atunci când douăzeci și unu de drahme îi sunt adăugate devine egal cu echivalentul a zece rădăcini ale acestui pătrat? Soluția: luați jumătate din numărul de rădăcini; jumătatea este cinci. Înmulțiți-o cu ea însăși; produsul este douăzeci și cinci. Luați din acesta douăzeci și unu, care este asociat cu pătratul; restul este patru. Extrageți-i rădăcina; va fi doi. Scădeți-o pe aceasta din jumătatea de rădăcini, care este cinci, și rămâne trei. Aceasta este rădăcina pătratului pe care o căutați, iar pătratul este nouă. Ați putea, de asemenea, să adăugați rădăcina la jumătate din rădăcini. Suma este șapte; aceasta este rădăcina pătratului pe care o căutați, iar pătratul însuși are valoarea patruzeci și nouă.

Un asemenea text este destul de greu de citit astăzi, chiar și pentru studioșii care stăpânesc perfect metoda despre care este vorba. Rezolvarea ne conduce la două soluții: 9 și 49.

Algebra retorică, așa cum se va numi mai târziu, nu numai că are o exprimare lungă, dar suferă și de anumite ambiguități ale limbii, care pot da unei fraze mai multe interpretări. Odată cu creșterea complexității raționamentelor și demonstrațiilor, acest mod de a scrie se va dovedi, progresiv, greu de mânuit.

La aceste dificultăți se adună câteodată și cele pe care matematicienii și le adaugă lor înșiși. Astfel, se găsesc în mod regulat matematici scrise în versuri. Adesea, acesta

este un fenomen rezidual al unei tradiții orale, în care învățarea pe de rost era ușurată de forma poetică. Atunci când Tartaglia i-a transmis metoda de rezolvare a ecuațiilor de gradul III lui Cardano, el a redactat-o în italiană și în vers alexandrin! Evident că demonstrația pierde din claritate ceea ce câștigă în poeticitate și se poate bănui în mod legitim că Tartaglia, căruia îi știm reticența în a-și divulga demonstrația, a îngreunat înțelegerea în mod voit. Iată un extras tradus în română:

Când cubul și lucrurile
Se găsesc egale în număr
Caută două alte numere care diferă de acesta.
Apoi, așa cum se obișnuiește,
Ca produsul lor să fie egal
Cu cubul treimii lucrului.
După aceea, în rezultatul general,
Din rădăcinile lor cubice bine scăzute,
Vei obține lucrul pe care îl cauți.

Cam obscur, nu-i așa? Ceea ce Tartaglia numește „lucru" reprezintă numărul căutat, necunoscuta. Prezența cuburilor în acest text ne arată că avem de-a face cu ecuațiile de gradul III. Însuși Cardano, odată ajuns în posesia poemului, se va confrunta cu cele mai mari greutăți pentru a-l descifra.

Pentru a face față acestei complexități mereu crescânde, matematicienii vor începe puțin câte puțin să simplifice limbajul algebric. Acest proces începe în occidentul musulman în ultimele secole ale Evului Mediu,

dar mișcarea va căpăta o cu totul altă amploare, mai ales în Europa dintre secolele al XV-lea și al XVI-lea.

Într-un prim moment și-au făcut apariția noile cuvinte specifice matematicii. Astfel, matematicianul galez Robert Recorde va propune la mijlocul secolului al XVI-lea o nomenclatură pentru anumitele puteri ale numărului necunoscut, bazat pe un sistem de prefixe care puteau să înmulțească puterile oricât de mult s-ar fi dorit. De exemplu, pătratul necunoscutei este denumit *zenzike*; la puterea a șasea se spune *zenzicubik,* iar la puterea a opta se spune *zenzizenzizenzike.*

Apoi, treptat, încep să înflorească simbolurile noi pe care astăzi le considerăm atât de familiare pretutindeni și în mod aleatoriu.

Spre 1460, germanul Johannes Widmann este primul care folosește semnele + și – pentru a desemna adunarea și scăderea. La începutul secolului al XVI-lea, Tartaglia, pe care îl cunoaștem deja, este unul dintre primii care au utilizat parantezele rotunde ( ) în calculele sale. În 1557, englezul Robert Recorde folosește pentru prima oară semnul = pentru a desemna egalitatea. În 1608, olandezul Rudolph Snellius folosește o virgulă pentru a separa partea întreagă de partea zecimală a unui număr. În 1621, este rândul englezului Thomas Harriot să introducă semnele < > pentru a indica inferioritatea sau superioritatea a două numere.

În 1631, englezul William Oughtred utilizează „x" pentru a nota înmulțirea și în 1647 devine primul care a utilizat litera grecească π pentru a desemna faimosul

raport al lui Arhimede. Germanul Johann Rahn folosește pentru prima oară, în 1659, semnul ÷ pentru împărțire. În 1525 germanul Christoff Rudolff desemnează rădăcina pătrată prin semnul √, la care René Descartes adaugă în 1647 o bară orizontală: √‾.

Bineînțeles că toate acestea nu se realizează într-o manieră liniară și ordonată. De-a lungul acestei perioade, o mulțime de alte simboluri se nasc și mor. Unele nu sunt folosite decât o dată. Altele se dezvoltă și își fac concurență. Între prima utilizare a unui semn și adoptarea sa definitivă de către un ansamblu al comunității matematice, adesea se scurg mai multe zeci de ani. Astfel, la un secol după introducerea lor, semnele + și – nu erau încă adoptate definitiv și mulți matematicieni utilizau literele P și M, inițialele cuvintelor latinești *plus* și *minus,* pentru a desemna adunarea și scăderea.

Ce caută Viète în toate acestea? Omul de știință francez va fi unul dintre catalizatorii acestei ample mișcări. În *Isagoge* el lansează un vast program de modernizare a algebrei și aici cheia de boltă o constituie introducerea calculului literal, cu alte cuvinte calculul cu literele alfabetului. Propunerea sa este pe cât de simplă, pe atât de derutantă: numirea necunoscutelor din ecuații se face prin vocale, iar numerele cunoscute prin consoane.

Această repartizare a vocalelor și a consoanelor va fi totuși repede abandonată în favoarea unei sugestii ușor diferită de cea a lui Descartes, anume primele litere ale alfabetului (*a, b, c...*) vor desemna cantitățile cunoscute, iar ultimele litere (*x, y* și *z*) vor semnifica necunoscutele. Această convenție este utilizată și astăzi de cea mai mare

parte a matematicienilor, iar litera „x" s-a impus până și în limbajul curent ca simbol al necunoscutului și al misterului.

Pentru a înțelege bine în ce fel se transformă algebra printr-un nou limbaj, să ne aducem aminte de ecuația următoare:

Se caută un număr care înmulțit cu 5 să dea 30.

Datorită noului simbolism, această ecuație se scrie de acum încolo doar cu câteva semne: 5 x x = 30.

Spuneți dumneavoastră că nu este o formulare mult mai scurtă! Aduceți-vă aminte și de faptul că această ecuație nu era decât un caz particular al unei clase cu mult mai mari:

Se caută un număr care înmulțit cu o anumită cantitate 1 să dea o cantitate 2.

Această ecuație se va nota de acum încolo a x x = b. Numerele a și b știm că sunt cantități cunoscute și de aceea le-am luat de la începutul alfabetului, iar cu ajutorul lor îl vom calcula pe x. Și, așa cum am văzut deja, ecuațiile de acest tip se rezolvă prin divizarea celei de-a doua cantități cunoscute prin prima; cu alte cuvinte: x = b : a.

De acum încolo matematicienii se vor apuca să creeze liste de cazuri posibile și să stabilească reguli de manipulare ale ecuațiilor literale. Algebra se va transforma puțin câte puțin într-o formă de joc ale cărui mișcări autorizate

sunt determinate de aceste reguli de calcul. Hai să reluăm rezolvarea ecuației! Trecând de la $a \times x = b$ la $x = b : a$, litera a a trecut de la stânga la dreapta semnului =, iar operația s-a transformat din înmulțire în împărțire. Deci, avem o regulă autorizată: orice cantitate înmulțită poate să treacă de cealaltă parte a egalității, devenind împărțire. Reguli asemănătoare ne permit să facem același lucru cu adunările și scăderile sau cu transformările puterilor. Scopul jocului este același: de a se afla valoarea necunoscutei x.

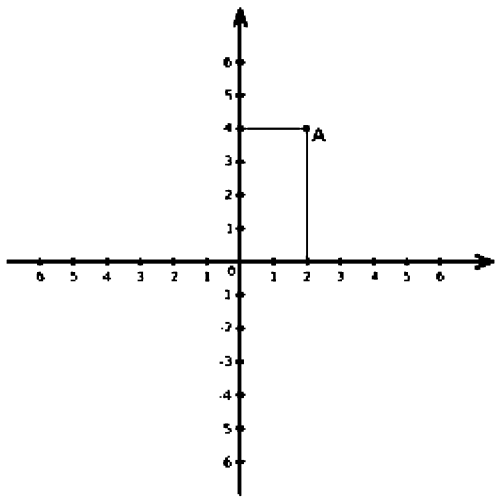
Acest joc al simbolurilor este atât de eficient, încât algebra își va căpăta repede independența în raport cu geometria. Nu va mai fi nevoie să interpretăm înmulțirile drept operații făcute pe dreptunghiuri și nici să facem demonstrații sub formă de puzzle-uri. Acum sunt la putere x, y și z! Mai mult decât atât, eficiența extraordinară a calculului literal va răsturna raportul de forțe și, în curând, chiar geometria va fi cea care va deveni dependentă de demonstrațiile algebrice.

Răsturnarea de situație va fi declanșată de francezul René Descartes prin introducerea unui mijloc simplu și puternic de algebrizare a problemelor geometriei cu ajutorul unui sistem de axe de coordonate.

Coordonatele carteziene

Ideea lui Descartes este pe cât de simplă, pe atât de genială: se plasează într-un plan două drepte gradate, una orizontală și cealaltă verticală, pentru a reprezenta fiecare punct geometric prin coordonatele sale

raportate la cele două axe. De exemplu, să privim, la punctul A din figura de mai jos:

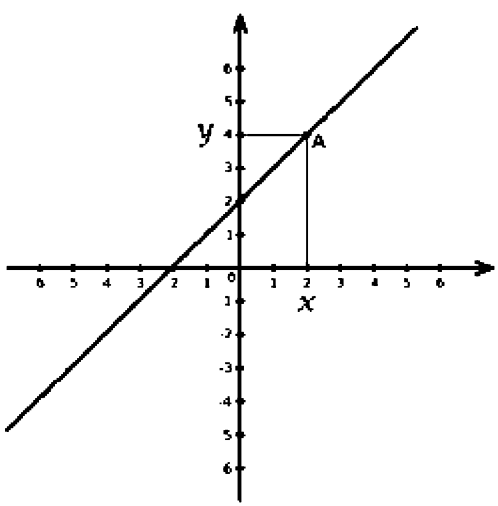


Punctul A se găsește chiar deasupra gradației 2 de pe axa orizontală și la nivelul gradației 4 de pe axa verticală. Coordonatele sale sunt așadar 2 și 4. Prin acest procedeu este posibil să fie reprezentat fiecare punct geometric prin două numere și invers; asocierea unui punct se face cu o pereche de numere.

Încă de la începuturile lor, geometria și numerele au întreținut întotdeauna raporturi foarte strânse, dar, odată cu apariția coordonatelor lui Descartes, cele două discipline se vor contopi una cu cealaltă. Fiecare problemă de geometrie va putea de acum încolo să fie interpretată algebric și fiecare problemă de algebră poate fi reprezentată geometric.

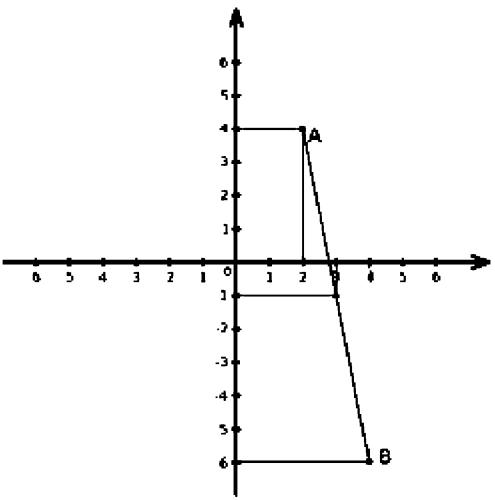
De exemplu, să privim următoarea ecuație de gradul I: $x + 2 = y$. Aceasta este o ecuație cu două necunoscute: adică le vom căuta pe x și pe y. Este posibil să avem $x = 2$ și $y = 4$, ceea ce reprezintă o soluție, deoarece $2 + 2 = 4$. În acest sens se poate observa că numerele 2 și 4 sunt exact coordonatele punctului A. Această soluție poate fi reprezentată geometric prin acest punct.

De fapt, ecuația $x + 2 = y$ are o infinitate de soluții. De exemplu, $x = 0$ și $y = 2$ sau $x = 1$ și $y = 3$. Pentru fiecare valoare posibilă a lui x este posibil să găsim pe y-ul corespondent adăugându-i 2. În acest caz putem să așezăm în planul nostru toate punctele care corespund acestor soluții. Iată ce putem obține!



Am obținut o linie dreaptă! Toate soluțiile se aliniază perfect pentru a forma o linie dreaptă. Niciuna nu va ieși din cadrul ei. În lumea lui Descartes, această dreaptă este deci reprezentarea geometrică a ecuației, tot așa cum ecuația este reprezentarea algebrică a acestei drepte. Cele două obiecte se confundă și nu rareori, în zilele noastre, îi vom auzi pe matematicieni vorbind despre dreapta „ $x + 2 = y$“. De fapt, dăm același nume unor lucruri diferite; algebra și geometria sunt pe cale să devină una și aceeași disciplină.

Această corespondență deschide calea apariției unui întreg dicționar care permite traducerea obiectelor din limbajul geometric în cel algebric și *viceversa*. De exemplu, ceea ce numim „mijloc“ în geometrie, poartă numele de „medie“ în algebră. Să revenim asupra punctului nostru A, de coordonate 2 și 4, și să-i adăugăm un punct B, de coordonate 4 și -6. Pentru a găsi mijlocul segmentului AB este suficient să calculăm media coordonatelor. Prima coordonată a lui A este 2 și cea a lui B este 4. Așadar, se poate deduce că prima coordonată a mijlocului este egală cu media celor două numere: (2 + 4) / 2 = 3. Făcând același lucru pe axa verticală, vom avea (4+(-6)) / 2 = -1. Deci, coordonatele punctului de mijloc sunt 3 și -1. Se poate verifica foarte ușor dacă desenăm figura.



În acest dicționar de algebră-geometrie, un cerc devine o ecuație de gradul II, punctul de intersecție a două curbe este dat de un sistem de ecuații, în timp ce în teorema lui Pitagora, construcțiile trigonometrice sau decupajele în puzzle se metamorfozează în diferite formule literale.

Pe scurt, nu mai este nevoie ca figurile să fie trasate pentru a face geometrie; calculele algebrice le-au luat locul și sunt extrem de rapide și practice.

În secolele care vor urma, coordonatele lui Descartes vor înregistra numeroase succese. Una dintre cele mai frumoase reușite ale coordonatelor a fost fără îndoială rezolvarea unei conjecturi care punea probleme

matematicienilor încă din Antichitate: cvadratura cercului.

Se poate, oare, trasa cu ajutorul riglei și compasului un pătrat care să aibă aceeași suprafață cu un anumit cerc dat? Să ne aducem aminte de scribul Ahmes care în urmă cu mai mult de trei mii de ani își bătea capul cu această întrebare. După el, chinezii și grecii și-au încercat forțele fără prea mult succes, iar problema a devenit de-a lungul secolelor una dintre cele mai mari conjecturi din matematică.

Datorită coordonatelor carteziene, liniile drepte construite cu ajutorul riglei se transformă în ecuații de gradul întâi, iar cercurile trasate cu compasul devin ecuații de gradul doi. Deci, din punct de vedere algebric, cvadratura cercului se pune în felul următor: se poate găsi oare o succesiune de ecuații de gradele I și II care ar avea ca soluție numărul π? Această nouă formulare va relansa cercetările, dar chiar și așa pusă, întrebarea rămâne complicată.

În cele din urmă, matematicianul german Ferdinand von Lindemann este cel care a pus capăt problemei în 1882. Nu, numărul π nu este soluție a ecuațiilor de gradul I sau II, deci cvadratura cercului rămâne imposibilă. Astfel a căzut problema care astăzi își păstrează titlul conjecturii ce a rezistat cel mai mult timp asalturilor matematicienilor.

Coordonatele carteziene se pot generaliza ușor în geometria în spațiu. În trei dimensiuni fiecare punct este identificat de trei coordonate, iar procedeele algebrice pot fi aplicate în același fel.

Lucrurile devin mai delicate imediat ce se trece la cea de-a patra dimensiune. În geometrie este imposibil să reprezentăm o figură în 4D, deoarece întreaga noastră lume fizică nu există decât în 3D. În schimb, în algebră, nu trebuie să ne facem griji pentru acest lucru: un punct dintr-a patra dimensiune este doar o listă de patru numere, iar toate metodele algebrice pot fi aplicate aici în mod natural. De exemplu, dacă se consideră punctele A și B ale căror coordonate sunt pe de o parte 1, 2, 3 și 4, iar pe de altă parte 5, 6, 7 și 8, se poate foarte ușor utiliza media acestor numere pentru a afirma că mijlocul lor este punctul de coordonate 3, 4, 5 și 6. Geometria în patru dimensiuni va fi exploatată în mod special în secolul XX de către teoria relativității a lui Albert Einstein, cel care va utiliza cea de-a patra coordonată pentru a modela timpul.

Și putem continua astfel multă vreme. O listă de cinci numere este un punct în dimensiune 5. Adăugați un al șaselea număr și iată-ne în dimensiunea 6. Nu există nicio limită impusă acestui demers. O listă de o mie de numere este un punct într-un spațiu de dimensiunea 1 000.

În sensul acesta, analogia poate părea un simplu joc de limbaj gata să ne provoace râsul și neavând o utilitate reală. Dar aparențele ne înșală. Această corespondență are multe aplicații, mai exact în statistică, al cărei scop este acela de a studia liste lungi de date numerice.

De exemplu, dacă se studiază datele demografice ale unei populații, ne-am putea dori să identificăm în ce măsură anumite caracteristici precum înălțimea, greutatea

sau obiceiurile alimentare ale unui grup de indivizi fluctuează în jurul unei valori. Interpretând această problemă geometric, ar însemna să calculăm distanța dintre două puncte în care primul reprezintă lista de date cu privire la fiecare individ, iar al doilea reprezintă lista cu valorile medii. Astfel, vor exista tot atâtea coordonate câți indivizi există în grup.

Calculul se face, în cazul acesta, cu ajutorul triunghiurilor dreptunghice, în care se poate aplica teorema lui Pitagora. Deci, un statistician care calculează devierea standard a unui grup de o mie de indivizi folosește adesea, fără să știe, teorema lui Pitagora într-un spațiu de dimensiune 1 000. Această metodă se aplică și în biologia evoluționistă, pentru calcularea diferențelor genetice între două populații de animale. Măsurând, cu ajutorul formulelor deduse din geometrie, distanța dintre genomurile codate ale acestora sub forma unor liste de numere, se poate stabili apropierea relativă între diferite specii și se poate deduce puțin câte puțin arborele genealogic al lumii vii.

Am putea chiar să împingem cercetarea până la a utiliza liste infinite de numere, adică să folosim puncte într-un spațiu de dimensiune infinită. De fapt, deja cunoaștem astfel de liste. Este vorba despre șirurile numerice precum cel al lui Fibonacci. Studiind iepurii, matematicianul italian făcea, fără să-și dea seama, geometrie în dimensiune infinită. Exact această interpretare geometrică va fi cea care le va permite matematicienilor din secolul al XVIII-lea să stabilească astfel cât mai clar posibil legătura subtilă care leagă șirul lui Fibonacci cu numărul de aur.

13

Alfabetul lumii

„Filosofia este scrisă în această imensă carte mereu deschisă în fața ochilor noștri care este universul, dar pe care nu o putem înțelege dacă nu încercăm mai întâi să-i înțelegem limba și să-i cunoaștem semnele cu care este scrisă. Ea este scrisă în limba matematică, iar semnele sunt triunghiurile, cercurile sau alte figuri geometrice fără de care ar fi imposibil ca ființa umană să înțeleagă un cuvânt."

Acest paragraf, unul dintre faimoasele texte din istoria științelor, a fost scris în 1623 de Galilei însuși într-o lucrare intitulată *Il Saggiatore (Experimentatorul)*.

Fără îndoială că Galilei este unul dintre cei mai prolifici și inovatori oameni de știință ai tuturor timpurilor. În general, savantul italian este considerat fondatorul științei fizice moderne. Trebuie să spunem că CV-ul său este cel puțin impresionant. El este inventatorul lunetei astronomice, este cel care a descoperit inelele lui Saturn, petele solare, fazele lui Venus și cei patru sateliți principali ai lui Jupiter. El a fost unul dintre cei mai influenți apărători ai heliocentrismului lui Copernic; este cel care a enunțat principiul relativității mișcării – care îi poartă astăzi numele – și a fost primul care a studiat în mod experimental căderea corpurilor.

Il Saggiatore arată cât de puternică este legătura, chiar și în această epocă, dintre matematică și fizică. Galilei este unul dintre primii care a contribuit la această apropiere dintre cele două științe. A urmat o școală foarte bună, deoarece, la vârsta de 19 ani, Ostilio Ricci, unul dintre elevii lui Tartaglia, este cel care l-a inițiat în matematică. El va fi urmat de generații întregi de oameni de știință, pentru care algebra și geometria vor reprezenta incontestabil limba în care lumea poate fi exprimată.

Trebuie să subliniem foarte puternic natura acestei relații care ia naștere între matematică și fizică. Facem acest lucru deoarece, după cum am văzut până acum de atâtea ori încă de la începutul istoriei noastre, matematica a fost întotdeauna folosită pentru a studia și a înțelege lumea. Dar ceea ce s-a întâmplat în secolul al XVII-lea este ceva cu totul nou. Până acum, modelele matematice rămâneau la stadiul de construcții umane, fiind copii fidele ale realității, dar necreate de aceasta. Atunci când topografii mesopotamieni utilizau geometria pentru a măsura un câmp dreptunghiular, acesta era trasat de către oameni. Dreptunghiul nu aparținea naturii înainte ca agricultorul să-l delimiteze. La fel, atunci când geografii triangulau o regiune pentru a-i desena harta, triunghiurile pe care le luau în considerare erau pur artificiale.

O cu totul altă provocare a fost aceea de a dori să fie matematizată lumea preexistentă omului! Este adevărat că unii oameni de știință au încercat acest lucru încă din Antichitate. Aduceți-vă aminte că unul dintre aceștia a fost Platon, cel care asocia cele cinci poliedre

regulate cu cele patru elemente ale Cosmosului. Chiar și pitagoricienii erau în mod deosebit reticenți față de acest gen de interpretare, dar trebuie să recunoaștem că teoriile lor cel mai adesea nu aveau nimic serios în ele. Erau construite pe baza unor considerații pur metafizice și fără să fie niciodată testate în mod experimental, și de aceea aproape toate s-au dovedit în cele din urmă a fi false.

Ceea ce vor înțelege oamenii de știință din secolul al XVII-lea va fi că natura însăși, în funcționalitatea sa profundă, este determinată de legi matematice exacte, care pot fi scoase la lumină cu ajutorul experimentelor. Una dintre cele mai strălucite realizări ale acestei epoci este, fără nicio îndoială, legea gravitației universale, descoperită de Isaac Newton.

În *Philosophiae naturalis principia mathematica (Principiile matematice ale filosofiei naturale)*, omul de știință englez este primul care a înțeles că rotația astrelor și căderea corpurilor pe Pământ pot fi explicate printr-un singur și același fenomen. Toate obiectele din Univers se atrag între ele. Această forță este întru totul nedetectabilă pentru obiectele mici, dar devine semnificativă în cazul planetelor sau stelelor. Pământul atrage obiectele și aceasta este rațiunea pentru care obiectele cad. Pământul atrage și Luna și, într-un anume sens, Luna cade și ea. Dar cum Pământul este rotund, iar Luna se deplasează cu foarte mare viteză, aceasta din urmă cade în permanență pe lângă Pământ, lucru care o conduce la mișcarea în cerc. Conform aceluiași principiu, planetele se învârt în jurul Soarelui.

Newton nu se mulțumește doar cu enunțarea acestei legi a atracției universale. El precizează și intensitatea forței cu care obiectele se atrag între ele și face acest lucru printr-o formulă matematică. Două corpuri oarecare se atrag cu o forță proporțională cu produsul maselor acestora împărțit la pătratul distanței dintre ele. Această formulă poate fi scrisă după cum urmează, conform calculului literal al lui Viète:

$$F = G \times \frac{m_1 \times m_2}{d^2}$$

În acestă formulă, litera F reprezintă intensitatea forței, m_1 și m_2 sunt masele respective ale celor două obiecte cărora le studiem atracția, iar d este distanța care le separă. În ceea ce privește numărul G, acesta este o constantă fixă care are valoarea de 0,0000000000667. Această valoare atât de mică explică faptul că forța este insesizabilă pentru obiectele mici și că este nevoie de masele imense ale planetelor și ale stelelor pentru ca gravitația să poată fi simțită. Gândiți-vă că, de fiecare dată când doriți să ridicați un obiect, veți demonstra că forța musculară este mai mare decât forța de atracție a întregului Pământ!

Odată formula stabilită, problemele fizicii se metamorfozează în probleme matematice. Astfel, este posibil să calculăm traiectoriile obiectelor celeste și, mai exact, putem să anticipăm evoluția viitoare a acestora. A găsi data în care va avea loc următoarea eclipsă înseamnă a găsi valoarea necunoscutei dintr-o ecuație algebrică.

În deceniile care vor urma, formula lui Newton va înregistra numeroase succese. Gravitația universală i-a permis să spună că Pământul trebuia să fie ușor aplatizat la poli, lucru care a fost confirmat de geometrii care au măsurat meridianul prin triangulație. Una dintre cele mai spectaculoase realizări ale teoriei newtoniene rămâne totuși calculul prin care anunța revenirea cometei Halley.

Încă din Antichitate, oamenii de știință au observat și consemnat apariția aleatorie a cometelor. Pentru a explica acest fenomen, două școli erau în dispută: aristotelicii considerau cometele fenomene atmosferice care se petreceau relativ aproape de Pământ, în timp ce pitagoreicii le vedeau ca pe un fel de planete, adică obiecte mult mai îndepărtate. Atunci când Newton a publicat *Principia mathematica*, polemica încă nu fusese pe deplin încheiată, iar oamenii de știință din cele două școli continuau să se certe pe acest subiect.

Unul dintre mijloacele de a dovedi că aceste comete sunt astre îndepărtate care orbitează în jurul Soarelui ar fi acela de a le descoperi o anumită periodicitate: un obiect care orbitează trebuie să treacă prin același punct la intervale regulate. Din păcate, la începutul secolului al XVIII-lea, nicio regularitate de acest gen nu a putut fi încă identificată. Dar apoi, în 1707, Edmund Halley, un astronom britanic, prieten al lui Newton, a anunțat că s-ar putea să fi găsit ceva.

În 1682, Halley a observat o cometă care, într-un prim moment, nu i se păruse extraordinară. Totuși, în anul precedent, astronomul fusese în Franța unde îl

întâlnise pe Cassini I la Observatorul din Paris. Acesta împărtășea cu Halley ipoteza unei reveniri periodice a cometelor. Halley s-a adâncit în arhivele astronomice și a descoperit aici alte două treceri de comete care i-au atras atenția. Una din 1531 și alta din 1607. Cometele din 1531, 1607 și 1682 alcătuiau două intervale identice de 76 de ani. Dacă ar fi fost vorba despre o aceeași cometă? Halley a făcut pariu și a anunțat că această cometă va reveni în 1758.

Au urmat cincizeci de ani de suspans. Așteptarea era insuportabilă și trepidantă. Alți oameni de știință au profitat de aceste momente pentru a face mai precisă predicția lui Halley. În acest sens, s-a sugerat că atracția gravitațională a celor două planete gigantice care sunt Jupiter și Saturn ar putea să modifice puțin traiectoria cometei. În 1757 astronomul Jérôme Lalande și matematiciana Nicole-Reine Lepaute s-au apucat să facă diferite calcule bazându-se pe un model realizat de Alexis Clairaut pornind de la ecuațiile lui Newton. Calculele sunt lungi și plictisitoare și a fost nevoie de mai multe luni pentru ca cei trei oameni de știință să prezică în final o trecere a cometei prin punctul cel mai apropiat de Soare în aprilie 1759, cu o marjă de eroare posibilă de maximum o lună.

Și atunci s-a produs lucrul de necrezut! Cometa s-a aflat la punctul de întâlnire, iar întreaga lume a văzut-o marcând pe cer triumful lui Newton și Halley. Ea a trecut pe lângă Soare pe 13 martie în intervalul calculat de Clairaut, Lalande și Lepaute. Din păcate, Halley nu a trăit atât de mult timp pentru a asista la revenirea cometei

căreia i s-a dat numele său, dar, cu toate acestea, teoria gravitației și, pornind de la ea, matematizarea fizicii au făcut dovada strălucită a puterii lor extraordinare.

Ca o ironie a istoriei, Galilei, în afară de discursul asupra matematizării lumii, susținea în al său *Experimentator* teza cometelor atmosferice. De fapt, cartea sa era un răspuns dat matematicianului Orazio Grassi care cu câțiva ani înainte apărase punctul de vedere opus. Renumele lui Galilei și tonul foarte polemic al cărții sale au făcut din ea un bestseller în epocă, dar nici celebritatea și nici succesul nu constituie adevărul. *E pur si muove...* ar fi putut să-i răspundă Grassi lui Galilei.

Dincolo de eroarea lui Galilei, această anecdotă ne arată în mod excepțional robustețea procesului științific care începe să se constituie în această epocă. Concluziile metodei științifice nu depind de opinia prealabilă a savantului care o pune în practică, chiar dacă acesta este Galilei. Faptele sunt încăpățânate! Natura reală a cometelor, precum și cea a totalității obiectelor care alcătuiesc lumea fizică sunt independente de ideea pe care și-o fac oamenii despre ele. În Antichitate, atunci când un om de știință recunoscut se înșela, o grămadă de discipoli îl urmau, în general, fără ezitate, căci autoritatea ținea locul argumentului. Adesea, mai multe secole nu erau suficiente pentru a dărâma o idee preconceptă, cu toate că o simplă experiență ar fi putut să o contrazică. Identificarea erorii lui Galilei în doar câțiva zeci de ani constituie semnul existenței unui mediu științific sănătos.

A prevedea traiectoria unei comete pe care am văzut-o deja reprezintă un lucru deosebit, dar cu totul

altceva este să calculezi traiectoria unui astru despre care nu se știe nimic. În rândul marilor reușite matematice în astronomie trebuie să luăm în considerare și descoperirea planetei Neptun în secolul al XIX-lea. Cea de-a opta și ultima planetă a sistemului solar este singura care a fost descoperită nu în urma observațiilor, ci în urma calculelor. Datorăm această reușită astronomului și matematicianului francez Urbain Le Verrier.

Încă de la sfârșitul secolului al XVIII-lea, mai mulți astronomi au observat neregularități în traiectoria planetei Uranus, pe atunci ultima planetă cunoscută a sistemului solar. Aceasta nu urma în mod exact traiectoria care era prezisă de legea gravitației universale. Așadar, nu puteau exista decât două explicații: fie teoria lui Newton era falsă, fie un alt astru încă necunoscut era responsabil de aceste perturbații. Pornind de la traiectoria observată a lui Uranus, Le Verrier a început să calculeze poziția acestei noi planete ipotetice. I-au trebuit doi ani de muncă asiduă pentru a ajunge la un rezultat.

Apoi a sosit și ceasul adevărului. În noaptea de 23 spre 24 septembrie 1846, astronomul german Johann Gottfried Galle și-a îndreptat luneta în direcția pe care i-a indicat-o Le Verrier, a privit prin ocular și... iat-o: o mică pată albăstruie pierdută în profunzimile nebănuite ale cerului nocturn! Planeta se afla chiar acolo, la mai mult de patru miliarde de kilometri de Pământ.

Ce sentiment formidabil și îmbătător, ce senzație de putere sau de emoție formidabilă or fi pus stăpânire în acea zi pe Le Verrier, cel care din vârful peniței sale și cu ajutorul ecuațiilor a reușit să captureze, să cuprindă și

aproape să controleze dansul titanic al planetelor care se învârt în jurul Soarelui! Cu ajutorul matematicii, monștrii cerești care erau zeități odinioară au ajuns dintr-odată să fie îmblânziți, docili și torcând domesticiți precum pisicile, sub mângâierile algebrei. Se poate imagina cu ușurință starea de intensă exaltare în care a ajuns comunitatea astronomică mondială în zilele care au urmat, când orice astronom amator, îndreptându-și luneta spre Neptun, se simțea înfiorat.

Dar viața unei teorii științifice are fazele sale! Mai întâi există momentul ipotezelor, al ezitărilor, al erorilor, al construcției progresive și începătoșate a ideilor. Urmează momentul confirmării, momentul experiențelor care validează sau nu ecuațiile și care, precum niște judecători inflexibili, le confirmă sau le resping definitiv. Apoi există perioada de înălțare, adică de căpătare a independenței. Este momentul în care teoria are destul de multă încredere în ea pentru a îndrăzni să-i vorbească lumii, fără să mai fie nevoie să o privească în ochi. Acesta este momentul în care ecuațiile pot să preceadă experiența și să prezică un fenomen care este încă neobservat, neașteptat și chiar nesperat. Este clipa în care teoria trece de la a fi descoperită la a fi descoperitoare, în care se aliază și devine aproape colegă cu oamenii de știință care au creat-o. În această fază, teoria este coaptă și așa se poate spune că am ajuns la momentul cometelor lui Halley și al descoperirii lui Neptun. De asemenea, este momentul eclipselor lui Einstein, precum cea din 29 mai 1919, prin care s-a putut vedea triumful relativității, este timpul bosonilor lui Higgs, descoperiți în 2012 conform

previziunilor modelului standard al fizicii particulelor, sau este timpul undelor gravitaționale, detectate pentru prima oară la 14 septembrie 2015.

Toate marile descoperiri științifice, pentru a deveni adulte și a-și câștiga legitimitatea, au o nevoie vitală de matematică, de ecuațiile algebrice și de figurile geometrice. Matematica a știut să facă dovada puterii ei incredibile, astfel încât nicio teorie fizică serioasă nu ar îndrăzni astăzi să se prezinte într-un alt limbaj decât cel matematic.

Cristalografie

Matematizarea lumii se face și în chimie, acolo unde vom regăsi acum vechi cunoștințe. La începutul secolului XX, mineralogul francez René Just Haüy, în momentul în care i-a scăpat din mâini o rocă de calcit, a constatat că aceasta se sparge într-o multitudine de bucăți care au toate aceeași structură geometrică. Bucățile nu sunt aleatorii, acestea au fețe plane care formează unghiuri foarte precise unele față de altele. Pentru ca un astfel de fenomen să se producă, Haüy a dedus că blocul de calcit trebuie să fie alcătuit dintr-o mulțime de elemente asemănătoare, care se asamblează unele cu celelalte într-o manieră perfect regulată. Un solid care are această proprietate se numește cristal. Cu alte cuvinte, un cristal observat la scară microscopică este alcătuit dintr-un motiv, cu mai mulți atomi sau molecule care se repetă identic în toate direcțiile.

Un motiv care se repetă? Acesta nu vă aduce aminte de nimic? Principiul seamănă uimitor de mult cu frizele mesopotamiene și cu pavajele arăbești. O friză prezintă un motiv care se repetă — conform unei direcții, iar un pavaj conform cu două direcții. Deci pentru a studia un cristal trebuie să reluăm aceleași principii, dar de astă dată într-un spațiu cu trei dimensiuni. Artizanii mesopotamieni au descoperit șapte categorii de frize, iar artiștii arabi pe cele șaptesprezece ale pavajelor. Datorită structurilor algebrice, de atunci încolo a fost posibil să se demonstreze că aceste numere sunt optime, căci nu lipsește nicio combinație. Aceleași structuri algebrice ne vor permite să stabilim că există 230 categorii de pavaje în 3D. De exemplu, printre cele mai simple pot fi găsite pavajele alcătuite din cuburi, prisme hexagonale sau octoedre trunchiate[1], reprezentate mai jos.

De la stânga la dreapta: aranjament de cuburi, de prisme hexagonale și de octoedre trunchiate. Aceste aranjamente se pot prelungi la infinit în spațiu.

[1] Octoedrul este unul dintre cele cinci solide ale lui Platon pe care le-am întâlnit deja. Octoedrul trunchiat se obține prin tăierea vârfurilor octoedrului în același fel în care obținem icosaedrul trunchiat (mingea de fotbal); care se obține prin tăierea vârfurilor unui icosaedru. *(N.a.)*

Aceste figuri se aranjează și se îmbină de fiecare dată în mod perfect fără a lăsa găuri, formând deci o structură care se poate prelungi la infinit în toate direcțiile. Cine ar fi crezut că gândirea geometrică a artizanilor mesopotamieni conținea în germene bazele a ceea ce va deveni mai târziu una dintre componentele esențiale ale studiului proprietăților materiei?
Cristalele se găsesc cam peste tot în viața noastră cotidiană. Am putea să ne gândim la sarea de bucătărie, care este alcătuită dintr-o multitudine de mici cristale de clorură de sodiu, sau la cuarț, ale cărui oscilații foarte regulate atunci când îi aplicăm un curent electric fac din el un element indispensabil pentru buna funcționare a ceasurilor noastre. Trebuie să avem totuși grijă, căci cuvântul cristal este câteodată utilizat în mod abuziv în limbajul curent. Astfel, în realitate, paharele de cristal nu sunt alcătuite din cristale în sensul științific al termenului.

Dacă doriți să admirați specimene mult mai spectaculoase, puteți să vizitați o colecție de mineralogie, cum ar fi, de exemplu, cea de la Universitatea Pierre și Marie Curie din Paris, care este una dintre cele mai frumoase din lume.

Eficacitatea extraordinară a matematizării lumii nu răspunde totuși la o întrebare surprinzătoare. Cum se face că limbajul matematic este perfect adaptat pentru descrierea lumii? Pentru a înțelege în ce sens întrebarea este uimitoare, să revenim la formula lui Newton.

$$F = G \times \frac{m_1 \times m_2}{d^2}$$

Așadar, intensitatea forței gravitaționale se enunță printr-o formulă care introduce două înmulțiri, o împărțire și o ridicare la pătrat. Simplitatea acestei formule pare a fi o șansă nemaipomenită. Știm foarte bine că nu toate numerele se pot exprima prin formule matematice simple. Este cazul numărului π și al altora de acest fel. Din punct de vedere statistic, numerele complicate sunt cu mult mai numeroase decât cele simple. Dacă luați un număr la întâmplare, veți avea mult mai multe șanse să dați peste un număr cu virgulă decât peste un număr întreg. Tot așa veți avea mai multe șanse să dați peste un număr care are o înșiruire zecimală infinită decât finită și cu mult mai multe șanse să dați de un număr care nu poate fi exprimat prin nicio formulă care să se calculeze cu ajutorul operațiilor elementare.

Formula lui Newton este cu mult mai uimitoare decât toate acestea, căci forța variază în funcție de masele și distanța dintre obiecte. Nu avem de-a face cu o simplă constantă precum π. Cu toate acestea, oricare ar fi masele celor două corpuri și oricare ar fi distanța dintre ele, atracția pe care acestea o exercită unul asupra celuilalt se măsoară întotdeauna cu ajutorul acestei formule. Înainte ca Newton să-și elaboreze legea, ar fi fost rațional să se considere că intensitatea forței este absolut inexprimabilă

printr-o formulă matematică. Iar când această formulă s-ar fi descoperit, ne-am fi așteptat să dăm peste una complexă care să conțină operații mult mai grele decât înmulțirea, împărțirea și ridicarea la pătrat.

Ce șansă de nesperat ne-a adus formula lui Newton prin forma în care aceasta se prezintă! Și ce mister incredibil ca natura să ne vorbească atât de elegant în limba matematicii! S-a întâmplat deseori ca modele realizate de matematicieni doar pentru frumusețea lor să-și găsească aplicabilitate în științele fizice multe secole după elaborarea lor. Dar acest mister nu se oprește doar la gravitație. Fenomenele electromagnetice, funcționarea cuantică a particulelor elementare, deformarea relativistă a spațiului-timp, toate aceste fenomene se exprimă în matematică cu o precizie uimitoare.

Să luăm faimoasa formulă $E = mc^2$. Această egalitate stabilită de Albert Einstein oferă o echivalență între masa și energia obiectelor fizice. Nu vom explica această formulă aici, căci nu despre ea este vorba. Doar gândiți-vă la acest lucru: principiul lui Einstein, care este în general considerat unul dintre cele mai fascinante și mai profunde principii care exprimă funcționarea Universului nostru, este pus într-o formulă algebrică de doar cinci simboluri! Prin ce minune s-a făcut acest lucru? În general, împrumutăm de la Einstein fraza care rezumă întreaga situație uimitoare: „Cel mai de neînțeles lucru în Univers este că acesta poate fi înțeles!“ Trebuie să pricepem formula aceasta „de înțeles“ cu ajutorul matematicii. În 1960, fizicianul Eugene Wigner va vorbi și el despre „irațională eficacitate a matematicii“.

Și atunci, cunoaștem noi atât de bine aceste obiecte abstracte, numere, figuri, șiruri sau formule pe care credem că le-am creat? Dacă matematica este cu adevărat produsă de creierul nostru, de ce le regăsim dincolo de cutiile noastre craniene ca pe niște spirite rătăcitoare? Ce caută ele în lumea fizică? Există acestea cu adevărat acolo? Nu ar trebui, oare, să vedem mai degrabă în aceste fantome ale realului o imensă iluzie optică? A considera că obiectele matematicii ar avea o formă de existență în afara spiritului uman ar însemna să le acordăm o realitate, pe când ele nu sunt decât pure abstracții. Ce ar semnifica în cazul acesta verbul „a exista" pe care îl asociem acestora, din moment ce ele nu au nimic material în sine?

Nu vă bazați pe mine pentru a avea cel mai mic început de răspuns la aceste întrebări!

14

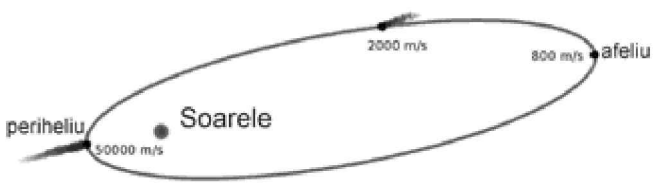
Infinitul mic

Strânsa colaborare dintre matematică și fizică nu va rămâne mult timp într-un sens unic. Începând cu secolul al XVII-lea, cele două discipline nu vor înceta deloc să facă schimburi de idei și să se hrănească una pe cealaltă. Deoarece fizica este înfometată de formule, fiecare nouă descoperire pune de-acum încolo o problemă matematică ce se ascunde în spatele ei. Există acestea deja sau sunt inventate? În cea de-a doua eventualitate, matematicienii se găsesc puși în dificultatea de a sculpta pe măsura fizicii noi teorii. În acest caz, vor găsi în științele fizicii una dintre cele mai frumoase muze ale lor.

Dezvoltarea gravitației newtoniene este una dintre primele care a necesitat matematici inovatoare. Pentru a o înțelege, să revenim pe pista cometei Halley! A cunoaște forța care o atrage spre Soare este un lucru, dar cum putem, pornind de la această informație, să-i deducem traiectoria și să obținem datele utile despre ea, precum poziția pe care o are la o anumită dată sau perioada precisă a revoluției sale?

Una dintre întrebările clasice la care va fi nevoie de un răspuns este exact aceea cu privire la distanța parcursă în funcție de viteză. Dacă vă spun că viteza cu care

cometa străbate spațiul este de 2 000 de metri pe secundă și dacă v-aș cere să găsiți distanța pe care ea o parcurge într-un minut, atunci răspunsul ar fi simplu de dat. Într-un minut cometa va străbate 60 ori 2 000 de metri, adică 120 000 de metri sau 120 de kilometri. Problema este că realitatea este mult mai complicată decât atât. Viteza cometei nu este fixă, ci variază de-a lungul timpului. Aflată la afeliu, adică în punctul cel mai îndepărtat de Soare, viteza ei este de 800 de metri pe secundă, în timp ce în momentul în care se află la periheliu, adică în cel mai apropiat punct de Soare, ea are o viteză de 50 000 de metri pe secundă. Așadar avem o diferență serioasă.



Și toată subtilitatea reiese din faptul că între aceste două extreme cometa accelerează progresiv, fără să aibă în niciun moment o viteză fixă. De exemplu, există un moment în care cometa evoluează la 2 000 de metri pe secundă, dar acesta nu durează prea mult. Cu o fracțiune de secundă mai înainte, viteza ei era puțin mai mare, să zicem 2 000,001, iar cu o fracțiune de secundă după aceea viteza s-a transformat în 1 999,999. Este imposibil să găsim cel mai mic interval de timp, fie el și minuscul, în care cometa să aibă o viteză constantă. În cazul acesta, cum putem să calculăm cu precizie distanța pe care o parcurge?

Pentru a răspunde la această întrebare, matematicienii vor reveni la o metodă care seamănă în mod straniu cu cea utilizată acum două mii de ani de Arhimede pentru a calcula numărul π. Așa cum omul de știință din Siracuza a aproximat cercul cu ajutorul poligoanelor care au din ce în ce mai multe laturi, tot așa este posibil să ne apropiem de curba deplasării ei considerând că traiectoria cometei trece prin paliere de viteză având intervale din ce în ce mai scurte. De exemplu, ne putem imagina că traiectoria cometei are o viteză fixă de 800 metri pe secundă într-un anume interval de timp. Apoi trece brusc la 900 de metri pe secundă în intervalul unui alt timp și așa mai departe. Traiectoria calculată astfel nu va fi exactă, dar poate fi considerată ca o aproximație, iar pentru a crește gradul de precizie este suficient să rafinăm intervalele. În loc să luăm în calcul intervale de 100 de metri pe secundă fiecare, e posibil să coborâm la tranșe de 10, de 1 sau chiar de 0,1 metri pe secundă. Cu cât tranșele de viteză vor fi decupate mai fin, cu atât rezultatul va fi mai apropiat de traiectoria reală a cometei!

Aproximările succesive obținute pentru distanța parcursă între afeliu și periheliu formează în acest caz un șir care ar putea să semene cu acesta:

47 42 40 39 38,6 38,52 38,46 38,453 ...

Aceste numere sunt date în unități astronomice[1]. Altfel spus, dacă se ia în considerare că viteza cometei

[1] O unitate astronomică corespunde distanței Pământ–Soare și măsoară aproximativ 150 de milioane de kilometri. *(N.a.)*

rămâne fixă în intervale de 100 de metri pe secundă, vom afla că distanța dintre afeliu și periheliu este egală cu 47 de unități astronomice. Vom avea în acest caz o aproximare grosolană. Dacă rafinăm intervalele și mergem pe tranșe de 10 metri pe secundă, vom găsi că aceeași distanță este de 42 de unități astronomice. Rafinând din ce în ce mai mult decupajul vitezelor, se constată în mod clar că aceste lungimi se apropie din ce în ce mai mult de o valoare-limită care se concentrează tot mai mult în jurul lui 38,45. Această valoare limită corespunde în acest caz cu distanța reală parcursă de cometă între două puncte extreme ale traiectoriei sale.

Într-un anumit fel, putem risca să spunem că această valoare-limită corespunde rezultatului obținut prin decuparea traiectoriei cometei într-o infinitate de intervale infinit de mici. La fel ca în cazul metodei lui Arhimede aplicată în vederea calculării lui π, ea se poate reduce la a spune că un cerc este un poligon având o infinitate de laturi, infinit de mici. Întreaga problemă a acestor două afirmații se găsește în noțiunea de infinit. Știm încă de la Zenon că infinitul este o noțiune ambiguă și subversivă a cărei manipulare ne împinge spre un echilibru periculos pe care l-am avea chiar pe buza prăpastiei paradoxurilor.

Trebuie să alegem între două opțiuni: fie refuzăm în mod categoric orice intervenție a infinitului — și în acest caz ne limităm la a studia în mod laborios problemele fizicii newtoniene cu ajutorul limitelor șirurilor de aproximări —, fie luăm taurul de coarne și intrăm prudent în mlaștina subdiviziunilor infinit de fine.

Tocmai această a doua cale va fi aleasă de către Newton în cartea sa *Principia mathematica*. El va fi urmat îndeaproape de către matematicianul german Gottfried Wilhelm Leibniz, care va descoperi în mod independent aceleași concepte și va dezvolta cu mai multă precizie anumite noțiuni ce rămâneau destul de vagi la Newton. Din aceste explorări va lua naștere o nouă ramură a matematicii care va căpăta numele de „calcul infinitezimal".

Problema paternității calculului infinitezimal a fost îndelung dezbătută în anii care au urmat. Dacă Newton a fost chiar primul care s-a angajat pe această pistă încă din 1669, el va întârzia să-și publice rezultatele, iar Leibniz îl va depăși, publicându-și lucrările în 1684, cu trei ani înaintea apariției *Principia Mathematica*. Din aceste date încâlcite nu va lipsi nici apariția unei controverse aprinse între englez și german, care își vor reclama, fiecare, inventarea teoriei și vor merge până într-acolo încât se vor acuza de plagiat. Totuși cei doi savanți se pare că nu-și cunoscuseră reciproc lucrările și chiar au inventat calculul infinitezimal în mod independent.

Așa cum se întâmplă de obicei la începutul unei teorii, nu totul este perfect. Numeroase elemente duc încă lipsă de rigoare și de justificări în lucrările lui Newton și ale lui Lebniz. Aproape la fel s-a întâmplat și în cazul numerelor imaginare, unde s-a observat că anumite metode funcționează, iar altele nu, fără să putem explica de ce.

Obiectul calculului infinitezimal este așadar acela de a cartografia acest teritoriu încă necunoscut marcând

punctele de trecere autorizate și acelea care, din contră, ne conduc spre impasuri și paradoxuri.

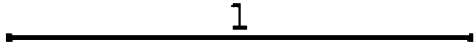
În 1748, matematiciana italiană Maria Gaetana Agnesi publică *Instituzioni analitiche (Instituțiile analitice)*, care constituie primul punct de vedere complet despre starea tinerei discipline. Un secol mai târziu, germanul Bernhard Riemann este cel care va realiza ultimele lucrări ce ne vor permite să înaintăm pe această cale fără niciun pericol.

De aici înainte, matematicienii vor folosi din plin calculul infinitezimal și vor începe să-și pună o mulțime de întrebări care vizează lucruri aflate la mii de kilometri distanță de aplicațiile fizice originare. Căci dincolo de a fi un simplu instrument, teoria se va dovedi pasionantă în a dezghioca lucruri și, în plus, extrem de frumoasă. Iar cum știința este o interminabilă partidă de ping-pong, aceste noi descoperiri vor vorbi puțin câte puțin despre noile aplicații în alte câmpuri disciplinare decât acela al astronomiei.

Infinitezimalele vor fi puse la treabă în toate problemele care, precum traiectoria cometei, fac să intervină mărimi care variază continuu. Se folosește în meteorologie pentru a modeliza și prezice evoluția temperaturii sau a presiunii atmosferice. În oceanografie se utilizează pentru a urmări curenții marini. În aerodinamică, pentru controlul pătrunderii în atmosferă a unei aripi de avion sau a diferitelor navete spațiale. În geologie, pentru a urmări evoluția mantalei terestre și studierea vulcanilor, a cutremurelor sau, pe termen lung, a derivelor continentale.

De-a lungul explorărilor, matematicienii vor descoperi în lumea infinitezimală o mulțime de rezultate ciudate dintre care unele îi vor pune în fața unei intense perplexități.

Una dintre primele idei pe care le putem avea atunci când încercăm să definim un interval infinit de mic este acela de a ne fixa niște puncte. Însuși Euclid a precizat acest lucru; un punct este cel mai mic element geometric care, având o lungime egală cu 0, este, de fapt, infinit de mic. Din păcate această idee mult prea simplă pentru a fi funcțională va fi lăsată deoparte. Pentru a înțelege de ce este așa, priviți acest segment de dreaptă care măsoară o unitate de lungime.



Segmentul este alcătuit dintr-o infinitate de puncte care are fiecare o lungime egală cu 0. Se pare că este posibil să se spună că lungimea intervalului este egală cu o infinitate de 0! Lucru care poate fi redat în limbajul algebric astfel: $\infty \times 0 = 1$, în care ∞ este simbolul pentru infinit. Problema acestei concluzii constă în aceea că, dacă se consideră acum un interval de lungime 2, și acesta este alcătuit dintr-o infinitate de puncte, ceea ce ne va da de astă dată $\infty \times 0 = 2$. Cum este posibil ca un același calcul să aibă două rezultate diferite? Și, făcând să varieze lungimea intervalului, se poate la fel de bine să obținem că $\infty \times 0$ face 3, 1 000 sau chiar π!

Din această experiență trebuie să tragem o concluzie: conceptele de zero și de infinit utilizate în acest context nu sunt destul de precis definite pentru scopurile noastre. Un calcul precum acela al $\infty \times 0$, al cărui rezultat variază după interpretarea sa se numește „o formă indeterminată". Este imposibil să folosim aceste forme în calculele algebrice fără să vedem imediat miile de paradoxuri care apar. Dacă ne-am permite înmulțirea lui $\infty \times 0$ ar trebui prin urmare să acceptăm și că 1 este egal cu 2 și alte aberații de felul acesta. Pe scurt, se impune să procedăm altfel.

Vom încerca să abordăm o altă cale, deoarece un interval infinitezimal nu poate fi un punct de sine stătător, ci un segment delimitat de două puncte distincte, dar infinit de apropiate. Ideea este seducătoare, însă încă o dată vom da peste o piatră de încercare, căci asemenea puncte nu există de fapt. Distanța dintre două puncte poate fi oricât de mică am dori, dar ea va avea întotdeauna o lungime pozitivă. Un centimetru, un milimetru, o miliardime de milimetru sau și mai mult dacă doriți, toate aceste lungimi sunt, desigur, foarte mici, dar în niciun caz infinitezimale. Cu alte cuvinte, două puncte distincte nu se ating niciodată.

Acest enunț are în el ceva extrem de derutant. Atunci când trasați o linie continuă, precum un segment, nu există locuri goale în acesta și totuși punctele care îl compun nu se ating. Niciun punct nu se află în contact direct cu punctele învecinate. Absența găurilor din linie este datorată în mod unic acumulării infinite de puncte infinit

de mici. Iar dacă se interpretează punctele dreptei prin coordonatele acestora, același fenomen poate fi tradus în termeni algebrici: două numere diferite nu-și urmează niciodată unul altuia în mod direct; întotdeauna există o infinitate de alte numere care vor veni să se interpună între ele. Între numerele 1 și 2 există 1,5. Între numerele 1 și 1,1 există 1,05, între numerele 1 și 1,0001 există 1,00005. Am putea să continuăm mult timp în felul acesta. Numărul 1 — precum toate celelalte — nu are un succesor imediat lipit de el. Cu toate acestea, numerele se adună laolaltă în jurul lui în mod infinit, asigurând astfel continuitatea perfectă a lungii sale succesiuni.

După aceste două încercări nereușite, trebuie să ne hotărâm să recunoaștem că numerele clasice, așa cum erau ele definite până acum, nu sunt destul de puternice ca să dea naștere la cantități infinit de mici. Aceste specimene insesizabile care, fără a avea valoarea zero, sunt totuși mai mici decât toate numerele pozitive vor trebui să fie create bucățică cu bucățică. Iată ce au făcut Lebniz și oamenii de știință care i-au călcat pe urme în construirea calculului infinitezimal: de-a lungul a trei secole, ei s-au ocupat cu definirea regulilor calculului care se aplică acestor noi cantități și s-au ocupat și cu delimitarea câmpului de acțiune al acestora. Astfel, ei vor produce între secolele al XVII-lea și XX un întreg arsenal de teoreme care răspund cu o mare eficacitate la problemele puse de infinitezimale.

Astfel, există numere care nu sunt cu adevărat numere și care se pot utiliza totuși ca intermediare ale calculului? Acest caz începe de acum încolo să devină

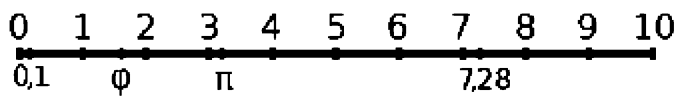
familiar. Numerele negative și imaginare au trecut deja prin situația aceasta. Dar, ca de fiecare dată, procesul de asimilare este lung și e greu să-i prezicem viitorul. În anul 1960, matematicianul american Abraham Robinson va crea un nou model, numit „analiza nonstandard", care integrează infinitezimalele ca numere de sine stătătoare. Totuși, spre deosebire de numerele imaginare, la începutul secolului XXI, cantitățile infinitezimale încă nu au dobândit cu adevărat titlul de numere veritabile. Modelul non standard al lui Robinson rămâne destul de marginalizat și puțin utilizat.

Poate că ar fi nevoie în continuare de noi descoperiri, evoluții, de teoreme marcante pentru ca teoria nonstandard să se impună definitiv. Poate că, din contră, aceasta nu va avea niciodată potențialul necesar pentru a deveni modelul dominant, iar în acest caz infinitezimalele nu vor fi puse niciodată pe picior de egalitate cu ilustrele sale predecesoare, numerele negative și imaginare. Desigur, analiza nonstandard este frumoasă, dar poate că nu este suficientă și încă nu are destul de multe beneficii pentru a trezi un entuziasm general. După doar câteva zeci de ani de existență, modelul lui Robinson rămâne tânăr și este lăsat în seama matematicienilor din viitor să-i decidă soarta.

Printre dezvoltările cele mai fructuoase ale calculului infinitezimal, teoria măsurii, imaginată la începutul secolului XX de către francezul Henri-Léon Lebesgue, rămâne una dintre ramurile cele mai ciudate. De aceea se pune întrebarea: se pot imagina și măsura cu

ajutorul infinitezimalelor noi figuri geometrice rămase inaccesibile riglei și compasului? Răspunsul este da, iar aceste figuri inedite vor ajunge cu ușurință în doar câțiva ani până la legile cele mai intuitive ale geometriei clasice.

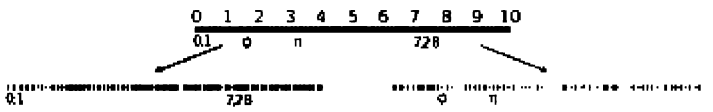
Luați ca exemplu un segment gradat de la 0 la 10.



În maniera lui Descartes, această gradație ne permite să asociem fiecare punct al segmentului cu un număr cuprins între 0 și 10. Pe acest segment se pot distinge, în cazul acesta, punctele care corespund unor numere care au o scriere zecimală finită (de exemplu, 0,1 sau 7,28), precum și cele care au o infinitate de cifre după virgulă (precum π sau numărul de aur φ). Ce se întâmplă în cazul în care se decupează segmentul după acest criteriu? Cu alte cuvinte, dacă se colorează punctele din prima categorie prin îngroșare și celelalte cu o nuanță mai deschisă, cu ce vor semăna cele două figuri geometrice astfel reprezentate, închisă și deschisă la culoare?

Nu este ușor să răspundem la această întrebare, căci aceste două categorii de numere se întretaie infinit. Dacă luați un interval de numere, oricât de mic, acesta va conține întotdeauna atât puncte îngroșate, cât și puncte deschise la culoare. Între două puncte deschise la culoare, întotdeauna există cel puțin un punct îngroșat, iar între două puncte îngroșate există întotdeauna cel puțin un

punct deschis. Cele două figuri seamănă, așadar, cu două linii de praf infinit de fine care se întrepătrund perfect.

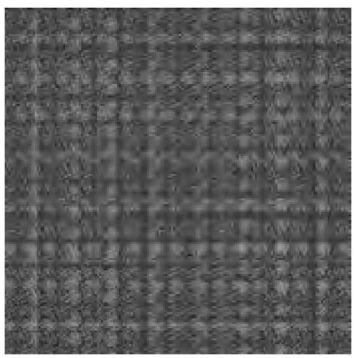


Segmentul [0,10] se împarte în două: la stânga sunt numerele cu scriere zecimală finită și la dreapta cele cu scriere zecimală infinită.

Sigur că reprezentarea de mai sus este eronată! Avem aici doar o reprezentare grosieră, deoarece detaliile pe care le vedem sunt foarte mici, dar nu sunt cu adevărat infinitezimale. Este imposibil să desenăm concret aceste figuri care nu pot fi corect înțelese decât prin algebră și raționament.

În acest caz, se pune următoarea întrebare: cât măsoară aceste figuri? Deoarece segmentul de plecare are o lungime egală cu 10, aceste două figuri ar trebui să aibă aceeași lungime, dar cum se poate face decupajul? Au ele fiecare aceeași mărime de 5 sau una este mai lungă decât cealaltă? Răspunsul pe care îl vor descoperi matematicienii care s-au aplecat asupra acestei probleme este uimitor. Absolut întreaga lungime este acaparată de figura alcătuită din numerele având o scriere infinită. Figura deschisă la culoare măsoară 10, iar figura închisă 0. Cu toate că cele două ansambluri par a fi egale în intersectarea lor, există infinit mai multe puncte deschise la culoare decât puncte închise.

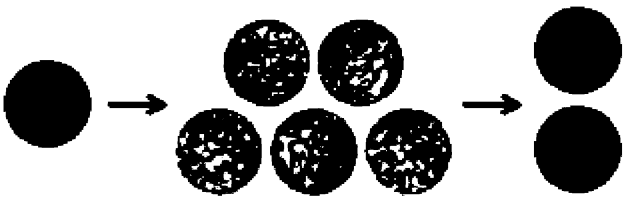
Cu ajutorul coordonatelor lui Descartes, acest tip de figuri înceţoşate pot să se generalizeze şi la nivelul suprafeţelor şi volumelor. De exemplu, se poate lua în considerare ansamblul punctelor unui pătrat ale cărui două coordonate au o scriere infinită.



Încă o dată, aceasta nu este decât o reprezentare grosieră care ne dă o vagă idee despre precizia infinită a detaliilor.

Măsurarea acestor figuri înceţoşate ne va conduce la unul dintre cele mai stupefiante rezultate din matematică, deoarece, în ciuda tuturor eforturilor savanţilor care se vor apleca asupra problemei, unele dintre aceste figuri rămân imposibil de măsurat. Această imposibilitate a fost pusă în evidenţă în 1924 de Stefan Banach şi Alfred Tarski, care vor descoperi un contraexemplu la principiul puzzle-ului.

Ei vor găsi un mijloc de a decupa o sferă în cinci bucăţi, în aşa fel încât aceste bucăţi reasamblate să permită construirea a două sfere perfect identice cu prima şi fără să existe nicio gaură.



Cele cinci figuri intermediare pe care ei le utilizează sunt exact figuri începțoșate cu decupaje infinitezimale. Dacă piesele puzzle-ului lui Banach–Tarski ar fi fost măsurabile, atunci suma acestor volume ar fi fost egală atât cu volumul sferei din care au luat naștere, cât și cu volumul celor două sfere pe care le reconstituie. Acest lucru fiind imposibil, se impune o singură concluzie: noțiunea însăși de volum nu are sens pentru aceste figuri.

De fapt, rezultatul lui Banach și Tarski este mult mai spectaculos, deoarece afirmă că dacă luați două figuri geometrice clasice, în trei dimensiuni, este întotdeauna posibil să o decupați pe prima într-un anumit număr de piese începțoșate care să permită reconstituirea celei de-a doua. De exemplu, este posibil să se decupeze o sferă având mărimea unui bob de mazăre în mai multe bucăți și să se poată reconstitui cu ajutorul acestor bucăți o sferă având mărimea Soarelui fără să avem vreo gaură în interiorul său! Acest decupaj este adesea denumit în mod fals paradoxul lui Banach–Tarski, din cauza aspectului său puternic contraintuitiv. Totuși nu este vorba despre un paradox, ci despre o teoremă pe care o fac posibilă figurile începțoșate fără ca raționamentul să sufere vreo contradicție.

Desigur, natura infinitezimală a acestor decupaje o fac absolut irealizabilă în mod concret. Figurile începătoșate rămân până azi în depozitul curiozităților matematice care nu au aplicabilitate fizică. Cine știe dacă într-o zi nu vor ieși la iveală pentru a-și găsi utilizări neașteptate?

15

Măsurarea viitorului

Marsilia, 8 iunie 2012

În dimineața aceasta m-am trezit foarte devreme. Puțin nervos, dar arzând de nerăbdare, mi-am luat repede micul dejun, mi-am pus cea mai frumoasă dintre cămășile pe care le am și iată-mă ieșit din casă! Afară soarele se târăște pe cerul provensal, iar răcoarea nopții se risipește repede. Ziua se anunță a fi caldă. În Vechiul Port, piața de pește își deschide porțile, în timp ce câțiva turiști matinali se perindă deja pe Canebière[1].

Dar astăzi nu am timp de plimbare! Cobor la metrou și merg în direcția cartierului Château-Gombert, spre nordul orașului. Aici se află CMI, Centrul de Matematică și Informatică unde muncesc de mai bine de patru ani. De regulă, aici lucrează cam o sută de matematicieni. Ajungând în biroul meu, mai verific pentru o ultimă dată ce am de făcut. Am în față trei recipiente mari, semisferice, umplute cu bile multicolore și, alături, un teanc de hârtii pe coperta cărora se pot citi următoarele:

[1] Bulevardul principal al Marsiliei, de care marsiliezii sunt foarte mândri. *(N.r.)*

Urne interdependente
TEZĂ
în vederea obținerii titlului de doctor, specialitatea matematică,
de Mickaël Launay,
sub coordonarea doamnei Vlada Limic

Astăzi este ultima mea zi la CMI. În după-amiaza aceasta, la ora 14, îmi voi susține teza de doctorat.

Anii de doctorat reprezintă o perioadă atipică în viața unui om de știință. Doctoranzii sunt tot un fel de studenți, totuși nu mai merg la cursuri și nici nu au examene trimestriale de dat. În realitate, zilele noastre seamănă foarte mult cu cele ale cercetătorilor cu normă întreagă. Trebuie să citim ultimele articole apărute, să discutăm cu alți matematicieni, să participăm la seminare, apoi să ne străduim să punem umărul la progresul domeniului în care activăm, să emitem noi conjecturi, să elaborăm noi teoreme, să le demonstrăm și să le redactăm. Toate acestea se petrec sub controlul unui matematician sever, însărcinat să ne ghideze primii pași în lumea cercetării și să ne învețe dedesubturile meseriei. În ceea ce mă privește, coordonatorul meu de doctorat este matematiciana franco-croată Vlada Limic, specialistă în domeniul în care mi-am îndreptat cercetările de-a lungul acestor patru ani. Lucrările sale și ale mele se înscriu în cadrul unei ramuri ale matematicii care

a apărut la mijlocul secolului al XVII-lea; este vorba despre probabilități.

Pentru a înțelege mizele acestei discipline, trebuie să ne întoarcem din nou în istorie. În timp ce așteptăm ora 14, haideți să ieșim câteva momente din CMI și permiteți-mi să vă conduc pe cărările riscante ale aleatoriului.

Hazardul îi fascinează pe oameni de mult timp. Încă din preistorie ei au observat multitudinea de fenomene inexplicabile, neregulate, fără nicio cauză aparentă, pe care le arăta natura. Într-un prim moment și din lipsă de altceva, au fost puse pe seama zeilor. Eclipsele, curcubeiele, cutremurele, epidemiile, inundațiile rare ale fluviilor sau cometele reprezintă tot atâtea manifestări care au fost interpretate drept mesaje divine adresate celor care știu să le descifreze. Sarcina aceasta a fost atribuită vrăjitorilor, oracolelor, preoților sau altor șamani care, pentru că trebuiau să-și câștige traiul cumva, au creat o întreagă panoplie de ritualuri destinate să-i interogheze pe zei, fără să aștepte ca aceștia să se încumete să se arate. Cu alte cuvinte, oamenii s-au apucat să imagineze mijloace de a crea aleatoriul la comandă.

Belomanția sau arta divinației cu ajutorul săgeților reprezintă una dintre cele mai vechi astfel de tehnici. Scrieți pe săgeți diferitele opțiuni din QCM-ul[1] pe care îl adresați zeului ales, puneți-le într-o tolbă, scuturați-o și luați o săgeată la întâmplare. Aveți astfel răspunsul! De exemplu, așa își alegea Nabucodonosor al II-lea, rege al

[1] QMC = Questionnaire à Choix Multiple; chestionar cu variante de răspuns. *(N.r.)*

Babilonului, dușmanii cărora le declara război în secolul al VI-lea înaintea erei noastre. În afară de săgeți, obiectele extrase puteau fi de alte forme: pietricele, tăbliță, baghete sau bile colorate. Romanii au dat acestor obiecte numele de „sorți". Din acest termen provine expresia „a trage la sorți", dar și cuvântul în franceză *„sortilège"* (vrajă, vrăjire) care la origine îl desemnează fie pe ghicitorul care pune întrebări zeilor, fie verdictul zeului însuși.

Puțin câte puțin, mecanismele de extragere aleatorie se vor multiplica și își vor găsi numeroase aplicații. Mai multe sisteme politice le utilizează; astfel se petreceau lucrurile la Atena pentru desemnarea celor cinci sute de cetățeni din Bule[1] sau, câteva secole mai târziu, la Veneția, în procesul de desemnare a dogelui. Hazardul se va dovedi a fi una dintre marile surse de inspirație pentru creatorii de jocuri. Așa au apărut aruncarea monedei (jocul „cap sau pajură"), zarurile numerotate ale căror forme vor fi împrumutate de la solidele lui Platon sau chiar jocurile de cărți.

În cele din urmă zeii vor decide tocmai prin jocurile de noroc să atragă atenția câtorva matematicieni. Aceștia din urmă vor avea ideea stranie de a cerceta cum se măsoară destinul, căutând cu ajutorul logicii și al calculului proprietățile viitorului, înainte ca acesta să se realizeze.

Totul a început la mijlocul secolului al XVII-lea, în timpul unei ședințe care avea loc la Academia din Paris,

[1] Consiliul cetățenesc, la grecii antici. *(N.r.)*

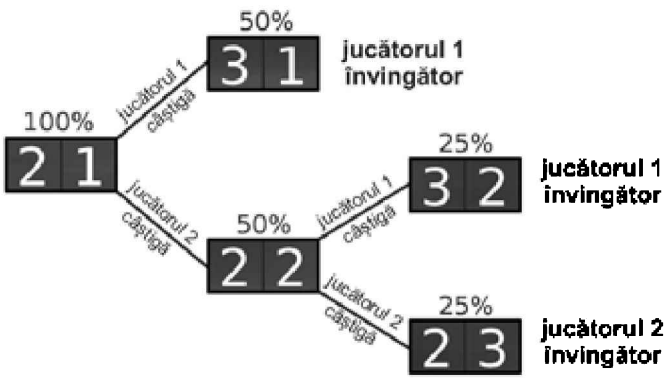
străvechea Academiei de Științe create în 1635 de matematicianul și filosoful Marin Mersenne.

În timpul unei discuții între oamenii de știință din diferite domenii, scriitorul Antoine Gombaud, matematician amator în timpul liber, propune adunării o problemă la care lucra. Imaginați-vă, spunea el, că doi jucători și-au pus o anumită sumă de bani într-un joc de noroc alcătuit din trei runde câștigătoare, dar că partida s-a întrerupt în momentul în care primul jucător conducea cu doi la unu la runde. Cum ar trebui să-și împartă miza cei doi jucători înainte de a se despărți?

Dintre savanții prezenți în acea zi, problema îi atrage în mod special pe doi, și anume: Pierre de Fermat și Blaise Pascal. După câteva schimburi epistolare, ei vor ajunge la concluzia că trei sferturi din miză ar trebui să revină primului jucător și un sfert celui de-al doilea.

Pentru a ajunge la acest răspuns, cei doi savanți vor trece în revistă ansamblul de scenarii după care s-ar fi putut desfășura partida dacă ea s-ar fi terminat, evaluând în același timp șansele de câștig ale fiecăruia dintre jucători.

Astfel, în următoarea rundă ipotetică, primul jucător ar fi avut 50% șanse să câștige partida, în timp ce al doilea jucător ar fi avut 50% șanse să revină la egalitate, iar în această eventualitate o nouă rundă ar fi fost jucată cu tot atât de multe șanse de câștig pentru cei doi jucători, ceea ce ne oferă astfel două scenarii, având fiecare 25% șanse de reușită. Acest raționament poate fi tradus prin graficul următor, care rezumă diferitele posibilități de desfășurare a partidei.



Pe scurt, se constată că 75% din viitorul posibil conduce la victoria primului jucător, în timp ce al doilea are doar 25% șanse. Așadar, concluzia lui Pascal și a lui Fermat împarte banii aflați în joc conform acestor proporții: ar fi corect ca primul jucător să păstreze 75% din miză, iar cel de-al doilea cei 25% rămași.

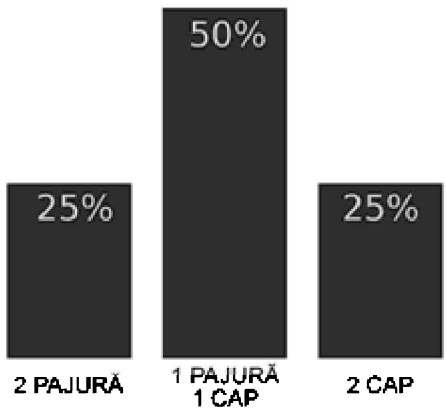
Raționamentul celor doi savanți francezi se va dovedi extrem de fecund. Cele mai multe jocuri de noroc pot constitui obiectul acestui tip de examinare. Matematicianul elvețian Jacques Bernoulli a fost unul dintre primii care le-a urmat exemplul și a redactat la sfârșitul secolului al XVII-lea o lucrare intitulată *Ars Conjectandi* sau *Arta de a presupune,* care nu va fi publicată decât în 1713, după moartea sa. În această carte el reia analiza jocurilor de noroc clasice și enunță pentru prima oară unul dintre principiile fundamentale ale teoriei probabilităților: legea numerelor mari.

Această lege afirmă următoarele: cu cât se repetă o experiență aleatorie de un număr mai mare de ori, cu atât media rezultatelor va fi mai previzibilă și se va apropia de o valoare-limită. Cu alte cuvinte, chiar și cel mai complex hazard sfârșește, în timp, prin a da naștere unor comportamente medii care nu mai au nimic aleatoriu în ele.

Pentru a înțelege acest fenomen nu trebuie să mergem prea departe. Simpla observare a unui joc de tipul cap sau pajură ne permite să vedem cum apare legea numerelor mari. Dacă aruncăm în aer o monedă bine echilibrată, fiecare dintre cele două fețe va avea 50% șanse să cadă, lucru ce poate fi reprezentat prin imaginea următoare:

Imaginați-vă acum că aruncați o monedă de două ori la rând și că numărați de câte ori pică o față sau alta. În acest caz avem trei posibilități: fie pică de două ori cap, fie de două ori pajură, fie o dată cap și o dată pajură. Ar fi tentant să gândim că aceste trei eventualități vor apărea

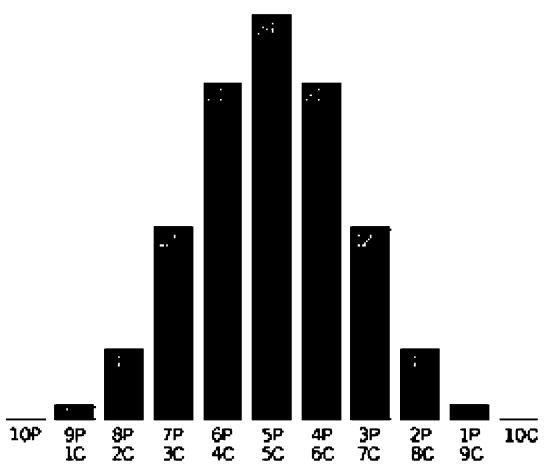
în proporții egale, dar lucrurile nu se petrec așa. În realitate există 50% șanse să obținem un cap și o pajură, în timp ce probabilitățile de a obține două capete sau două pajuri sunt de 25% fiecare.



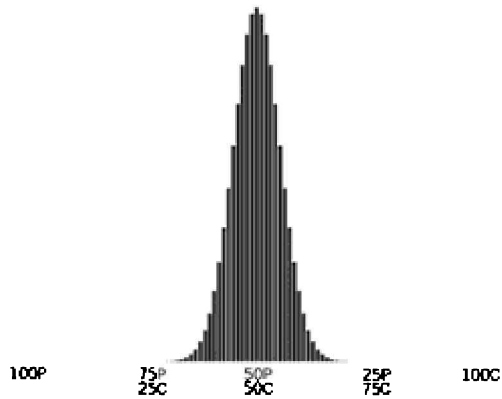
Acest dezechilibru este provocat de faptul că două aruncări diferite pot să dea același rezultat final. Atunci când aruncați de două ori moneda, în realitate există patru scenarii posibile: cap – cap, cap – pajură, pajură – cap, pajură – pajură. Scenariile cap – pajură și pajură – cap dau același rezultat final de un cap și o pajură, ceea ce explică faptul că această eventualitate este de două ori mai probabilă. În același fel, jucătorii știu prea bine că, dacă se aruncă două zaruri, suma lor are mai mari șanse să fie egală cu 7 decât cu 12, deoarece există mai multe modalități de a obține 7, respectiv: (1+6; 2+5; 3+4; 4+3; 5+2 și 6+1), în timp ce nu există decât una pentru a obține 12, anume: (6+6).

Cu cât creștem numărul de aruncări, cu atât fenomenul se accentuează. Scenariile care se îndepărtează de medie devin puțin câte puțin ultraminoritare față de scenariile medii. Dacă aruncați o monedă de zece ori, aveți 66% șanse să pice pajura între 4 și 6 ori. Dacă aruncați aceeași monedă de o sută de ori, veți avea 96% șanse să pice pajura între 40 și 60 ori, iar dacă aruncați de o mie de ori veți avea 99,99999998% șanse să pice pajura între 400 și 600 de ori.

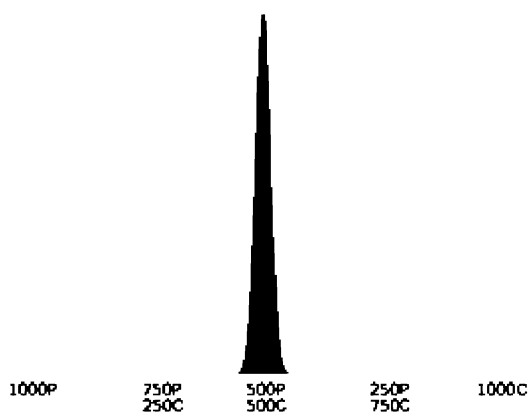
Dacă reprezentăm histograma corespunzătoare pentru 10, 100 și 1 000 de aruncări se observă foarte bine că, puțin câte puțin, majoritatea posibilităților viitoare se restrânge în jurul axei centrale, iar imaginile corespunzătoare situațiilor extreme devin din ce în ce mai invizibile cu ochiul liber.



Histograma de probabilitate a scenariilor posibile în cazul aruncării unei monede de 10 ori.



Histograma de probabilitate a scenariilor posibile
în cazul aruncării unei monede de 100 de ori.



Histograma de probabilitate a scenariilor posibile
în cazul aruncării unei monede de 1000 de ori.

Pe scurt, iată ce spune legea numerelor mari: repetând nedefinit o experiență aleatorie, media rezultatelor obținute se va apropia inevitabil de o valoare-limită care nu mai are nimic aleatoriu în ea.

Acest principiu stă la baza funcționării sondajelor și a altor statistici. Luați 1 000 de persoane dintr-o populație și întrebați-le dacă preferă ciocolata neagră sau cea cu lapte. Dacă 600 vă răspund că neagră și 400 cu lapte, aveți toate șansele ca în întreaga populație, chiar dacă este alcătuită din milioane de indivizi, să găsim aceeași proporție apropiată de 60% care preferă ciocolata neagră și 40% care preferă ciocolata cu lapte. A întreba o persoană luată la întâmplare despre gusturile sale poate fi considerată o experiență aleatorie în același fel în care putem arunca o monedă. Opțiunile cap și pajură sunt înlocuite de „ciocolata neagră" și „ciocolata cu lapte".

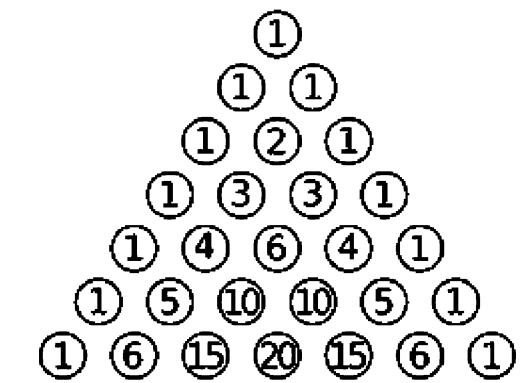
Bineînțeles că ar fi posibil să avem nenorocul să dăm peste 1 000 de persoane cărora le place numai ciocolata neagră sau peste 1 000 de persoane cărora le place numai ciocolata cu lapte, dar aceste scenarii extreme au o șansă infimă de a se realiza, iar legea numerelor mari ne asigură că, întrebând un eșantion suficient de mare, media obținută are foarte mari șanse să se apropie de media populației luată ca întreg.

Împingând și mai departe decriptarea multiplelor scenarii și a șanselor acestora de a se realiza este, de asemenea, posibil să stabilim un interval de încredere și să estimăm riscul de eroare. De exemplu, se va putea spune că există 95% șanse pentru ca proporția populației care preferă ciocolata neagră să se găsească între 57% și 63%. De altfel,

orice sondaj realizat în mod cinstit ar trebui să fie mereu însoțit de cifrele care indică precizia și fiabilitatea sa.

Triunghiul lui Pascal

În 1654, Blaise Pascal publică o lucrare intitulată *Tratat despre triunghiul aritmetic*. El descrie aici un triunghi alcătuit din cercuri în interiorul cărora sunt înscrise diferite numere.



Aici am reprezentat doar primele șapte linii, dar triunghiul se poate prelungi la infinit. Numerele care se găsesc în cercuri sunt determinate de două reguli. În primul rând, cercurile aflate pe margini nu conțin decât cifra 1. În al doilea rând, cercurile din interior conțin suma altor două care se găsesc imediat deasupra lor. De exemplu, numărul 6 care se află pe cea de-a cincea linie se obține prin adunarea celor doi 3 care se găsesc deasupra sa.

De fapt, acest triunghi era deja cunoscut cu mult înainte ca Pascal să se aplece asupra lui. Matematicienii persani Al-Karaji și Omar Khayyam îl aminteau încă din secolul al XI-lea. În aceeași epocă, el era studiat în China de către Jia Xian ale cărui lucrări vor fi completate în secolul al XIII-lea de către Yang Hui. În Europa, Tartaglia și Viète aveau și ei cunoștință de existența lui. Cu toate acestea, Blaise Pascal este primul care i-a consacrat un tratat atât de detaliat și complet. Totodată, el este și primul care a descoperit existența unei strânse legături între triunghi și calculul probabilităților.

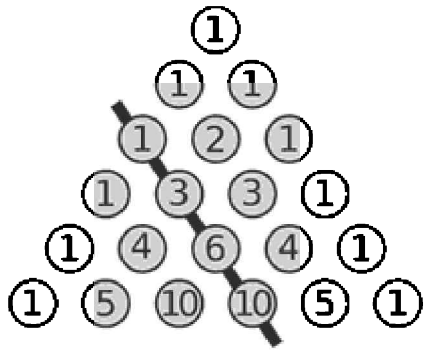
De fapt, fiecare linie a triunghiului lui Pascal ne permite să calculăm numărul de scenarii posibile ale unei succesiuni de evenimente având două variante, precum în cazul monedei. Dacă aruncați o astfel de monedă de trei ori la rând, există posibilitatea de a obține opt variante: pajură – pajură – pajură, pajură – pajură – cap, pajură – cap – pajură, pajură – cap – cap, cap – pajură – pajură, cap – pajură – cap, cap – cap – pajură și cap - cap – cap. Dacă tragem linie, vom observa că din aceste opt variante vom obține:

- 1 scenariu în care obținem de trei ori pajură;
- 3 scenarii în care obținem de două ori pajură și o dată cap;
- 3 scenarii în care obținem o pajură și de două ori cap;
- 1 scenariu în care obținem de trei ori cap.

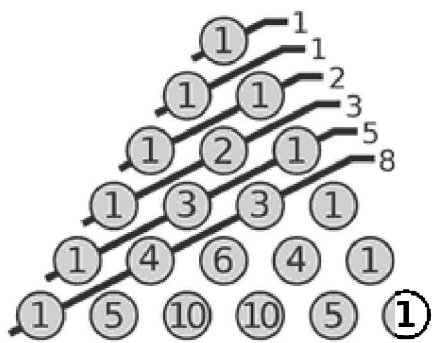
Dar această secvență de numere, 1 – 3 – 3 – 1 corespunde exact celei de-a patra linii a triunghiului. Acest lucru nu e o întâmplare și tocmai asta a reușit Pascal să demonstreze.

De exemplu, dacă privim la cel de-al șaselea rând, este posibil să vedem că, aruncând de cinci ori moneda, există 10 scenarii în care vom avea de 2 ori pajură și de 3 ori cap. Mergând mai departe în triunghiul nostru, va fi posibil să calculăm cu ușurință rezultatele scenariilor în care aruncăm de zece ori moneda (acest lucru îl vedem în cel de-al unsprezecelea rând din triunghi). O sută de aruncări pot fi observate la rândul 101 și așa mai departe. De altfel, cu ajutorul triunghiului lui Pascal au putut fi găsite cu ușurință histogramele prezentate mai înainte. Fără acesta, numărul de posibilități devine atât de mare, încât va fi repede imposibil să le listăm pe toate în mod individual.

Dincolo de probabilități, triunghiul lui Pascal își va arăta numeroasele legături pe care le are cu alte domenii din matematică. De exemplu, numerele care se găsesc în acest triunghi sunt de o mare utilitate în calculele algebrice care ne permit rezolvarea unor ecuații. Astfel, se pot regăsi în cercurile sale mai multe șiruri de numere foarte cunoscute, precum numerele triunghiulare (1, 3, 6, 10...) pe una dintre diagonalele sale, sau chiar șirul lui Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8...), făcând adunarea termenilor de-a lungul dreptelor paralele înclinate.



Șirul numerelor triunghiulare în triunghiul lui Pascal



Șirul lui Fibonacci în triunghiul lui Pascal

În secolele care vor urma, teoria probabilităților va crea instrumente din ce în ce mai rafinate și puternice pentru a analiza ansamblul de posibilități ce pot apărea. În curând, o strânsă și fructuoasă colaborare se va realiza cu calculul infinitezimal. De fapt, multe fenomene aleatorii

produc posibilități care pot suporta variații infinit de mici. De exemplu, într-un model meteorologic, temperatura variază în mod continuu. Așa cum un segment are o lungime anume, cu toate că punctele care îl compun nu au dimensiune, tot așa anumite evenimente pot să apară, deși fiecare dintre posibilitățile care compun fenomenul meteo nu are nicio șansă de a se realiza efectiv în mod individual. Probabilitatea ca în timpul unei săptămâni să avem exact 23,41 de grade sau oricare altă temperatură exactă este egală cu 0. Totuși, probabilitatea globală pentru ca temperatura să fie cuprinsă între 0° și 40° este în mod sigur reală!

O altă miză a teoriei probabilităților a fost aceea de a înțelege comportamentul sistemelor aleatorii capabile de a se modifica pe sine. O monedă rămâne mereu aceeași, fie că am aruncat-o o dată sau de o mie de ori. Dar multe situații din realitate nu sunt atât de simple. În 1930, matematicianul ungur George Pólya va publica un articol în care încearcă să înțeleagă cum se propagă o epidemie în sânul unei populații. Subtilitatea acestui model reiese din faptul că o epidemie se propagă mai repede atunci când un mare număr de persoane a fost deja atins de ea.

Dacă există mulți bolnavi în anturajul dumneavoastră, aveți mai multe șanse să vă îmbolnăviți. Iar dacă vă îmbolnăviți, chiar dumneavoastră sunteți un element care contribuie la creșterea riscurilor pentru persoanele care vă înconjoară. Pe scurt, procesul se autoalimentează, iar probabilitățile sunt în evoluție permanentă. Acest fenomen poartă numele de „șansă crescută".

Procesele aleatorii care prezintă șanse crescute vor cunoaște în continuare numeroase variante și multiple aplicații. Una dintre cele mai rodnice utilizări s-a dovedit

a fi în dinamica populațiilor. Luați o populație de animale căreia doriți să-i urmăriți evoluția trăsăturilor biologice sau genetice de-a lungul generațiilor. De exemplu, imaginați-vă că 60% din indivizii săi au ochii negri, iar 40% au ochii albaștri. În acest caz, prin ereditate, noii indivizi care se nasc au 60% șanse de a avea ochii negri și 40% de a avea ochii albaștri. Deci, evoluția culorii ochilor în această populație are o dinamică asemănătoare cu propagarea unei epidemii: cu cât există mai mulți indivizi care au o anumită culoare a ochilor, cu atât această culoare va avea mai multe șanse de a apărea din nou, deci proporția sa poate crește. Spunem că procesul se autoalimentează.

Astfel, studiul modelului lui Pólya ne permite să evaluăm probabilitățile evoluției diferitelor particularități biologice ale speciilor. Unele dintre acestea pot ajunge chiar la dispariție, altele, din contra, se pot impune în ansamblul populației, iar altele se instalează într-un echilibru intermediar și nu suferă decât mici variații de-a lungul generațiilor. Este imposibil să știm dinainte care dintre aceste scenarii se va produce, dar, precum în cazul jocului cu moneda, probabilitățile ne permit să distingem posibilitățile majoritare și să prevedem cele mai probabile evoluții pe termen lung.

Atunci când George Pólya a murit, în 1985, aveam aproape un an. Așadar, mi se poate permite să spun că am fost contemporan – timp de câteva luni – cu cel care a inițiat teoria în care urma să lucrez și să descopăr mai multe teoreme.

Fără a intra prea mult în detalii, rezultatele mele privesc evoluția mai multor procese aleatorii având șanse

crescute, care interacționează ocazional unele cu altele. De exemplu, imaginați-vă mai multe turme dintr-o aceeași specie, care trăiesc separat pe același teritoriu, dar care din când în când permit migrarea câtorva indivizi dintr-un grup în altul. Ce posibilități există și cum le putem calcula probabilitățile? Iată întrebări cărora cercetările mele le-au adus câteva răspunsuri.

Bineînțeles că teoremele mele sunt modeste și ar fi îndrăzneț să le menționez printre cele din această mare istorie cu atât de multe nume mari. Cred că, dacă am fost un cercetător onest care și-a făcut în mod corect treaba de-a lungul celor patru ani de teză, descoperirile mele au totuși o importanță derizorie în comparație cu cele ale altor numeroși matematicieni, cu mult mai buni decât mine. Dar ele au fost suficiente pentru a convinge juriul în fața căruia le-am expus de-a lungul unei întregi ore în această zi de 8 iunie 2012, iar oamenii aceștia mi-au acordat titlul de doctor.

Este destul de emoționant să intri, prin această ceremonie, în talazurile unei istorii atât de prestigioase. Cuvântul „doctor" vine din latinescul *docere* care înseamnă „a preda". Așadar, doctorul este cel care a deprins o îndemânare suficientă a unui subiect pentru a-l putea transmite la rândul său. De la sfârșitul Evului Mediu, universitățile care sunt urmașele moderne ale Museionului din Alexandria sau al Bayt al-Hikma din Bagdad eliberează doctorate și oferă cercetării și predării științifice un cadru instituțional stabil și durabil.

De atunci, științele au început o mișcare care vede, secol după secol, cum se succed cercetători, profesori și

elevi într-un cerc cvasipermanent de generații. Un lucru amuzant este că, odată cu această succesiune, este posibil să vedem cum a evoluat lumea academică a oamenilor de știință. Așa cum coordonatoarea mea este matematiciana Vlada Limic, ea însăși l-a avut ca îndrumător câțiva ani mai înainte pe probabilistul britanic David Aldous. Și putem continua așa mult timp. Astfel, mergând de la discipol la maestru, este posibil să retrasăm „genealogia" completă a unui matematician. Iată, mai jos, arborele meu care ajunge în secolul al XVI-lea, trecând prin mai mult de douăzeci de generații.

Deci, cel mai îndepărtat strămoș al meu este matematicianul Niccolo Tartaglia, pe care l-am întâlnit deja. Este imposibil să mergem mai departe în timp, deoarece savantul italian a fost un autodidact. El s-a născut într-o familie săracă, iar legenda spune chiar că tânărul Tartaglia a fost nevoit să fure din școala sa cărțile din care a învățat matematica.

În această genealogie îi veți întâlni și pe Galilei și pe Newton, care nu mai au nevoie de nicio prezentare. Într-un colț îl vedeți pe Marin Mersenne, cel care a creat Academia din Paris, acolo unde a luat naștere teoria probabilităților. Elevul său, Gilles Personne de Roberval, este inventatorul balanței cu două brațe care îi poartă numele. Puțin mai departe, observați că astronomul George Darwin este fiul naturalistului Charles Darwin, părintele teoriei evoluționiste.

Nu există nimic special în a întâlni asemenea personaje în acest arbore; cei mai mulți dintre matematicienii a căror genealogie merge destul de departe ajung să aibă în ea nume mari. De altfel, trebuie să precizăm că această figură nu reprezintă decât strămoșii mei direcți și ignoră numeroșii mei „veri". Astăzi, Tartaglia are mai mult de treisprezece mii de descendenți, iar numărul lor continuă să crească în fiecare an.

16

Apariția mașinilor

Stația de metrou *Arts et Métiers (Arte și meserii)* este una dintre cele mai ciudate din Paris. Călătorul care coboară se găsește deodată ca înghițit în burta de cupru a unui imens submarin. Mari angrenaje roșietice ies din plafon și zeci de hublouri se aliniază pe margini. Aruncați un ochi prin acestea și veți descoperi niște schițe neobișnuite care reprezintă diferite invenții vechi și inedite. Angrenaje eliptice, un astrolab sferic și roți hidraulice stau alături de un dirijabil sau de un convertor siderurgic de oțel. Fără mulțimea continuă a parizienilor grăbiți, care se precipită și ies de niciunde fără încetare pe culoarele subterane, abia dacă am putea să ne imaginăm cum ar apărea în fața noastră figura impozantă a căpitanului Nemo ieşind direct din romanul lui Jules Verne.

Totuși decorul de la metrou nu reprezintă decât o introducere a ceea ce ne așteaptă la suprafață. Astăzi mă îndrept spre Conservatorul Național de Arte și Meserii, sau CNAM, al cărui muzeu prezintă una dintre cele mai importante colecții de mașinării vechi, de tot felul. De la primele mașini motorizate la telegraful cu cadran, trecând prin manometrele cu piston, orologiile olandeze automate, pilele voltaice, războaiele de țesut cu cartele perforate, presele de tipografie cu șurub sau barometrele

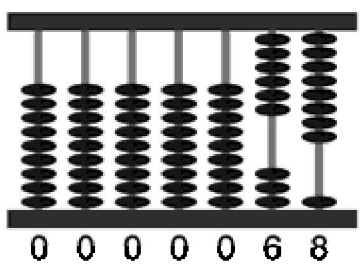
cu sifon, toate aceste invenții venind din trecut mă poartă într-un amețitor vârtej tehnologic din ultimele patru secole. Suspendat deasupra scării principale stă un aeroplan din secolul al XIX-lea, având aripi imense de liliac. În colțul unui culoar iată-mă în fața lui Lama, primul robot imaginat de savanții ruși în secolul XX, conceput pentru a se deplasa pe suprafața planetei Marte.

Trec repede prin fața acestor obiecte fabuloase și mă îndrept direct spre etajul al doilea al clădirii. Aici se găsește galeria instrumentelor științifice. Iată lunete astronomice, clepsidre, busole, balanțele lui Roberval, termometre gigantice și minunate globuri astronomice care se învârt în jurul axelor proprii. Iar apoi, deodată, în colțul unei vitrine observ obiectul pentru care am venit aici: pascalina. Această mașină ciudată se prezintă sub forma unei lădițe de alamă de 40 centimetri lungime pe 20 centimetri lățime, pe suprafața căreia sunt fixate șase rotițe numerotate. Acest mecanism a fost imaginat în 1642 de Blaise Pascal care avea atunci doar 19 ani. Am în fața ochilor prima mașină de calcul din istorie.

Prima? Pentru a fi corect, au mai existat dispozitive care permiteau efectuarea de calcule cu mult înainte de secolul al XVII-lea. Într-un anume fel, degetele au fost cele care au reprezentat primul calculator din toate timpurile, iar *Homo sapiens* a utilizat încă de foarte devreme diferite accesorii pentru a număra. Osul Isangho și tăieturile sale, jetoanele de argilă din Uruk, bețigașele chinezilor antici sau abacele care au cunoscut un imens succes încă din Antichitate, toate aceste instrumente au servit drept suport pentru numărare și calcul. Totuși,

niciunul dintre acestea nu intră sub definiția care se dă în general mașinilor de calcul.

Pentru a o înțelege, să ne aplecăm câteva momente asupra ei și să intrăm în detalii cu privire la funcționarea unui abac clasic. Obiectul este alcătuit din mai multe tije pe care culisează niște biluțe găurite. Prima tijă corespunde unităților, a doua zecilor, a treia sutelor și așa mai departe. Astfel, dacă doriți să scrieți numărul 23, împingeți două bile din coloana zecilor și trei din cea a unităților. Dacă doriți să-i adăugați 45, separați patru de pe tija zecilor și cinci unități suplimentare, ceea ce dă 68.



În schimb, dacă adunarea prezintă un element ce trebuie ținut minte, se impune să facem un mic artificiu suplimentar. Pentru a adăuga 5 la 68 nu ne mai rămâne decât o bilă disponibilă pe tija unităților. În acest caz, odată ce am ajuns la 9, trebuie să coborâm toate bilele pentru a continua unitățile începând de la 0, adăugând în același timp o bilă în coloana zecilor. Veți obține astfel 73.

Această operațiune nu este complicată și totuși ea este cea care va împiedica abacul, precum și toate mecanismele care au precedat pascalina, să capete numele de mașină de

calcul. Pentru a efectua aceeași operație, utilizatorul nu face același gest în funcție de prezența sau absența unui element care trebuie ținut minte. În realitate, mașina nu este decât un ajutor pentru memorie, care-i aduce aminte omului unde se află acesta, dar îi lasă întotdeauna sarcina de a efectua cu mâna diferitele etape ale calculului. Or, atunci când efectuați o adunare pe un calculator modern, nu vă preocupă absolut deloc modul în care mașina găsește rezultatul. Pot să existe sau nu elemente de ținut minte, acest lucru nu vă interesează. Nu mai este nevoie să gândiți sau să vă adaptați la situație, căci aparatul se ocupă de toate aceste lucruri.

Urmând acest criteriu, pascalina este în adevăratul sens al cuvântului prima mașină de calcul din istorie. Deși mecanismul este foarte precis și necesită o mare abilitate din partea constructorului său, principiul de funcționare rămâne destul de simplu. Deasupra mașinii se găsesc șase rotițe cu zece dinți numerotați.

Prima roată de la dreapta reprezintă cifra unităților, a doua cifra zecilor și așa mai departe. Deasupra roților se găsește o zonă de afișaj alcătuită din șase pătrățele, unul pentru fiecare rotiță, indicând fiecare o cifră. Pentru a

scrie numărul 28, răsuciți rotița zecilor cu doi dinți în sensul acelor de ceasornic și pe cea a unităților cu opt dinți. Printr-un sistem intern de angrenaje, veți vedea cum apar cifrele 2 și 8 în cele două căsuțe corespunzătoare, iar dacă acum doriți să adăugați 5 la acest număr, nu mai este nevoie să țineți minte un element: răsuciți în continuare rotița unităților cu cinci dinți, iar în momentul în care aceasta va trece de la 9 la 0, cifra zecilor va trece automat de la 2 la 3. Mașina va afișa acum 33.

Iar acest lucru funcționează indiferent de câte elemente de ținut minte aveți. Afișați 99 999 pe pascalină, apoi răsuciți rotița unităților cu un dinte. Veți vedea toate elementele de ținut minte cum se propagă în cascadă spre stânga pentru a face să apară numărul 100 000 fără ca utilizatorul să fi făcut vreun alt gest.

După Pascal, mulți inventatori vor perfecționa mașina acestuia pentru a putea face din ce în ce mai multe operații într-o manieră mai rapidă și mai eficace. La sfârșitul secolului al XVII-lea, Leibniz a fost unul dintre primii care a îmbunătățit substanțial mașina imaginând un mecanism care ne permite să efectuăm mai simplu înmulțiri și împărțiri. Sistemul lui rămâne totuși incomplet, iar mașinile pe care le-a fabricat produc încă erori din cauza elementelor care trebuie ținute minte în anumite cazuri particulare. Va trebui să așteptăm secolul al XVIII-lea pentru ca ideile să fie pe deplin puse în ordine. Acum vor apărea numeroase prototipuri mult mai fiabile și performante sub impulsul inventatorilor din ce în ce mai ingenioși și imaginativi. Complexitatea mecanismelor se face totuși cu prețul taliei mașinilor care, din

obiecte de dimensiuni modeste, devin câteodată adevărate obiecte de mobilier.

În secolul al XIX-lea, mașinile de calcul se democratizează și cunosc o răspândire asemănătoare cu cea a rudelor acestora, mașinile de scris. Numeroase birouri de contabilitate, oameni de afaceri sau pur și simplu comercianți se dotează cu aceste calculatoare care se integrează în decor și reușesc rapid să se facă indispensabile. Oamenii se întreabă cum s-a putut trăi fără ele până acum.

Mergând mai departe în vizita mea la muzeu, întâlnesc mai mulți urmași ai pascalinei. Există aici aritmometrul lui Thomas de Colmar, mașina de înmulțit a lui Léon Bollée, aritmograful policrom al lui Du Bois, sau *comptometrul* lui Felt și Tarrant. Unul dintre mecanismele care a cunoscut cel mai mare succes a fost aritmometrul pus la punct în Rusia de inginerul suedez Willgodt Theophil Odhner. Această mașină este alcătuită din trei elemente principale: partea înaltă, pe care se arată cu ajutorul unor manete numărul cu care dorim să operăm, partea de jos, alcătuită dintr-un cărucior care se deplasează pe orizontală și pe care se afișează rezultatul operației și, la dreapta, manivela care permite să se efectueze operația.

La fiecare tur de manivelă, numărul indicat în partea de sus se adună cu numărul deja afișat în căruciorul de jos. Pentru a face o scădere, răsuciți manivela în celălalt sens. Imaginați-vă acum că doriți să efectuați înmulțirea 374 x 523. Alcătuiți numărul 374 în partea de sus și răsuciți manivela de trei ori. Partea de jos va afișa în acest caz 1 122, adică rezultatul operației 374 x 3. Mișcați acum căruciorul de afișaj cu un dinte în direcția zecilor și răsuciți de două ori manivela. Se va afișa numărul 8 602 care corespunde înmulțirii lui 374 cu 23. Decalați din nou căruciorul cu un dinte pentru a trece la căsuța sutelor, răsuciți de cinci ori manivela și iată rezultatul dumneavoastră: 195 602. Dacă vă obișnuiți puțin și vă antrenați, nu veți avea nevoie decât de câteva secunde pentru a efectua înmulțirea.

În 1834, o idee care era cel puțin bizară i-a trecut prin minte matematicianului britanic Charles Babbage: aceea de a încrucișa o mașină de calcul cu un război de țesut. De câțiva ani, funcționarea războaielor de țesut cunoscuse mai multe îmbunătățiri. Una dintre ele consta în introducerea de cartele perforate care permiteau aceleiași mașini să producă motive de țesături de o mare varietate, fără să fie nevoie ca reglajele mașinii să fie schimbate. În funcție de prezența sau absența unei găuri într-un anumit loc de pe cartelă, o croșetă articulată traversa sau nu locul respectiv, iar firul de la suveică trecea pe deasupra sau pe dedesubtul firului de urzeală. Pe scurt, era suficient să fie indicat motivul dorit pe cartela perforată, iar mașina se adapta singură.

Pornind de la acest model, Babbage imaginează un calculator mecanic care nu era destinat doar să facă

diferite calcule precise, precum adunări sau înmulțiri, ci era capabil și să-și adapteze comportamentul și să realizeze milioane de operații diferite, în funcție de o cartelă perforată care se introducea în mașinărie. Mai exact, această mașină poate realiza toate operațiile polinomiale, adică efectuarea calculelor care combină într-o ordine oarecare cele patru operații de bază plus ridicarea la putere. În același fel în care pascalina îi permitea utilizatorului să facă aceeași mișcare indiferent de numerele folosite, mașina lui Babbage permite să se realizeze aceleași mișcări indiferent de operațiile realizate. Nu mai e nevoie, așa cum se petreceau lucrurile în cazul calculatorului lui Odhner, să răsucim o manivelă în sensul opus, în funcție de operația pe care o dorim, adunare sau scădere. Este suficient să se scrie calculul pe o cartelă perforată, iar mașina se ocupă de tot. Acest mod revoluționar de a funcționa face din mașina lui Babbage primul ordinator din istorie.

Modul său de funcționare a adus o nouă provocare. Pentru a efectua un calcul, trebuie să fii capabil să oferi mașinii cartela perforată adecvată. Aceasta din urmă este alcătuită dintr-o succesiune de goluri și de plinuri pe care mecanismul le va detecta și care îi vor indica etapă după etapă ce operații trebuie să fie efectuate. Deci utilizatorul mașinii trebuie, înainte de a o porni, să traducă acel calcul pe care îl dorește rezolvat, într-o succesiune de goluri și plinuri lizibile pentru mașină.

Matematiciana britanică Ada Lovelace[1] este cea care va continua și va dezvolta acest efort al traducerii. Ea

[1] Augusta Ada King, Contesă de Lovelace, născută Byron, fata marelui poet George Gordon Noel Byron (Lord Byron). *(N.r.)*

se va apleca asupra funcționării mașinii și va înțelege întregul său potențial, poate chiar mai mult decât și-ar fi putut imagina Babbage. Mai exact, ea va descrie un cod complex care îi va permite să calculeze șirul lui Bernoulli, care era extrem de util în calculul infinitezimal și care fusese descoperit cu mai mult de un secol înainte de către elvețianul Jacques Bernoulli. În general, acest cod este considerat primul program informatic și face din Lovelance prima programatoare din istorie.

Ada Lovelace a murit în 1852, la vârsta de 36 de ani. Charles Babbage va încerca toată viața să construiască mașina sa, dar moare în 1871, înainte ca prototipul să fi fost terminat. Va trebui să așteptăm secolul XX ca să vedem, în sfârșit, o mașină Babbage funcționând. A observa unul dintre aceste calculatoare în mișcare are ceva impresionant și fascinant totodată. Dimensiunile sale impunătoare (aproximativ doi metri înălțime pe trei lățime) și baletul coordonat al sutelor de angrenaje care se mișcă și se răsucesc în pântecele sale ne lasă o impresie uluitoare și minunată în același timp.

Prototipul neterminat al savantului britanic și-a găsit locul în *Science Museum* din Londra, unde îl putem admira și acum. Un exemplar funcțional, reconstituit la începutul secolului XXI, poate fi văzut și el la *Computer History Museum* din Mountain View, în California.

Secolul XX va asista la triumful computerelor în asemenea măsură, încât Babbage și Lovelace nu și-ar fi putut imagina vreodată. Mașinile de calcul vor beneficia de efectele convergente ale celor mai vechi, dar și ale celor mai recente matematici.

Pe de o parte, calculul infinitezimal și numerele imaginare au permis punerea în ecuație a fenomenelor electromagnetice care vor da naștere în curând aparatelor electronice. Pe de altă parte, secolul al XIX-lea a asistat la renașterea întrebărilor cu privire la fundamentele matematicii, ale axiomelor și ale raționamentelor elementare care permit realizarea demonstrațiilor. Primul punct va oferi mașinilor o infrastructură materială de o rapiditate ieșită din comun, iar cel de-al doilea va permite organizarea eficientă a calculelor elementare pentru a conduce la cele mai complexe rezultate.

Unul dintre principalii artizani ai acestei revoluții a fost matematicianul britanic Alan Turing. Acesta publică în 1936 un articol în care face o paralelă între posibilitatea din matematică de a demonstra o teoremă și cea din informatică de a face o mașină să calculeze un rezultat. El descrie aici pentru prima dată cum funcționează o mașină abstractă, care, de altfel, îi va purta numele și care rămâne până azi folosită pe scară largă în informatica teoretică. Mașina lui Turing este pur imaginară. Matematicianul britanic nu se preocupă de mecanismele concrete cu care ar putea fi construită. El propune doar operațiile elementare pe care le poate realiza mașina, apoi se întreabă ce este ea capabilă să obțină combinând între ele aceste operații. Vedem foarte bine aici analogia care există între un matematician care își fixează axiomele, apoi încearcă să deducă teoremele prin combinarea acestora.

Șirul instrucțiunilor care se dau unei mașini pentru a ajunge la un rezultat se numește „algoritm", deformarea latină a numelui „al–Khw rizm ". Trebuie să spunem

că algoritmii informatici se vor inspira foarte mult din procedeele de rezolvare a problemelor deja cunoscute de către antici. Amintiți-vă că al–Khw rizm , în al său *Al-Jabr*, nu ia în considerare doar elementele matematice abstracte, ci oferă și metodele practice care permit cetățenilor Bagdadului să găsească soluția la problemele lor fără să fie nevoie să-și însușească întreaga teorie. În același fel, unui computer nu este nevoie să i se explice teoria pe care, de altfel, ar fi incapabil să o înțeleagă. El are nevoie doar să i se indice care sunt calculele ce trebuie să fie realizate și în ce ordine.

Iată, de exemplu, un algoritm pe care îl putem oferi unei mașini. Aceasta deține trei căsuțe de memorie în care pot fi înscrise numerele. Ați putea ghici ce va calcula acest algoritm?

Etapa A: Înscrie numărul 1 în căsuța de memorie numărul 1, apoi treci la etapa B.
Etapa B: Înscrie numărul 1 în căsuța de memorie numărul 2, apoi treci la etapa C.
Etapa C: Înscrie suma din căsuțele de memorie numărul 1 și 2 în căsuța de memorie numărul 3, apoi treci la etapa D.
Etapa D: Înscrie numărul din căsuța de memorie numărul 2 în căsuța de memorie numărul 1, apoi treci la etapa E.
Etapa E: Înscrie numărul de la căsuța de memorie numărul 3 în căsuța de memorie numărul 2, apoi treci la etapa C.

Puteți observa că mașina merge în buclă, deoarece de la etapa E se revine la etapa C. Deci, etapele C, D, E se vor repeta la infinit.

Așadar ce face mașina aceasta? Trebuie să ne gândim puțin pentru a descifra acest șir de instrucțiuni, dat atât de rece și fără nicio explicație. Totuși veți putea înțelege că acest algoritm calculează numere pe care le cunoaștem deja foarte bine, deoarece este vorba despre elemente ale șirului lui Fibonacci[1]. Etapele A și B determină cele două prime elemente ale șirului: 1 și 1. Etapa C calculează suma celor doi termeni anteriori. Etapele D și E decalează apoi rezultatele obținute în memorie, astfel încât să se poată reîncepe. Dacă observați datele care se afișează în mod succesiv în căsuțele de memorie în timpul funcționării mașinii, în acest caz veți vedea cum defilează numerele 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 și așa mai departe.

Dacă acest algoritm pare relativ simplu, el nu este ușor de citit pentru mașinile lui Turing. Așa cum au fost definite de autorul lor, de fapt, aceste mașini nu sunt capabile să facă o adunare cum se cere în etapa C. Singurele facultăți sunt acelea de a scrie, de a citi și de a se deplasa de la o căsuță de memorie la alta, urmând instrucțiunile date la fiecare etapă. Totuși, este posibil să învățăm adunarea furnizându-i algoritmul prin care cifrele se adaugă rând pe rând și ținând cont de elementele de ținut minte, ca în cazul abacului. Cu alte cuvinte, adunarea nu face parte dintre axiomele mașinii, dar constituie una dintre

[1] Vă amintiți, desigur, de primele elemente ale șirului lui Fibonacci care sunt 1 și 1, apoi fiecare element reprezintă suma celor două precedente. Șirul începe astfel: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21... *(N.a.)*

teoremele căreia trebuie să-i alcătuim algoritmul pentru a putea fi utilizat. Odată scris acest algoritm, este suficient să-l substituim etapei C pentru ca o mașină Turing să poată calcula numerele lui Fibonacci.

Apoi, mărind complexitatea, este posibil să învățăm o mașină Turing să facă înmulțiri, împărțiri, ridicări la pătrat, extrageri de rădăcină pătrată, să rezolve ecuații, să calculeze aproximările lui π, ale rapoartelor trigonometrice sau să realizeze un calcul infinitezimal. Pe scurt, având în vedere că-i furnizăm algoritmii exacți, o mașină Turing poate să facă tot ceea ce am discutat până acum că a făcut matematica și apoi să meargă și mai departe.

Teorema celor patru culori

Luați harta unui teritoriu, alcătuită din mai multe regiuni delimitate de frontierele lor. De câte culori, minimum, avem nevoie pentru a putea colora această hartă, astfel încât două regiuni limitrofe să nu aibă niciodată aceeași culoare?

În 1852, matematicianul sud-african Francis Guthrie s-a aplecat asupra acestei întrebări și a emis o conjectură care spune că, orice hartă am alege, este posibil întotdeauna să folosim doar patru culori. După el, foarte mulți oameni de știință au încercat să demonstreze enunțul, dar nimeni nu a reușit să facă acest lucru, timp de mai mult de un secol. Totuși câteva încercări au fost realizate și s-a stabilit că toate hărțile se pot reduce la 1 478 de cazuri posibile, fiecare dintre acestea având nevoie de numeroase verificări. Doar că este imposibil pentru o ființă umană și chiar pentru o echipă întreagă să realizeze toate verificările necesare. O viață întreagă nu ar fi suficientă pentru a face acest lucru. Imaginați-vă puțin disperarea acestor matematicieni care aveau la îndemână metoda care le permitea să susțină sau să infirme conjectura, dar nu o puteau utiliza din cauza unei probleme de timp.

În anii 1960, ideea aceasta de a recurge la un computer începe să prindă rădăcini în mintea câtorva cercetători și, în cele din urmă, în 1976, doi americani, Kenneth Appel și Wolfgang Haken, au anunțat că au demonstrat teorema. Cu toate acestea, a fost nevoie de mai mult de 1 200 de ore de calcule și de 10 miliarde de operații elementare făcute de o mașină pentru a o scoate la capăt cu cele 1 478 de hărți.
Anunțul a avut efectul unei bombe în lumea matematicienilor. Cum ar trebui să fie primită această „demonstrație" care este de un gen cu totul nou?

Poate fi acceptată validitatea unei demonstrații atât de lungi, încât nicio ființă umană nu o poate citi în întregime? Până unde am putea să avem încredere în mașini?

Aceste întrebări au generat numeroase polemici. Dacă unii spuneau că nu putem fi siguri sută la sută că o mașină nu s-ar putea înșela, alții, în replică, spuneau că putem să facem aceeași observație și despre oameni. Un mecanism electronic valorează mai puțin decât mecanismul biologic al unui *Homo sapiens?* O demonstrație realizată de o mașină metalică este mai puțin fiabilă decât una realizată de o mașină organică? Adesea am văzut matematicieni, iar câteodată pe unii dintre cei mai mari, că au comis erori care nu au fost detectate decât foarte târziu. Acest lucru ar trebui să ne facă să ne îndoim de fundamentul ansamblului matematic? Fără îndoială că o mașină poate să dea rateuri și să comită uneori erori, dar dacă fiabilitatea sa este cel puțin egală cu cea a omului (și ea este adesea astfel), nu există niciun motiv să-i respingem rezultatele.

Astăzi matematicienii au căpătat încredere în computere și cea mai mare parte dintre ei consideră de acum încolo validă demonstrația teoremei celor patru culori. Numeroase alte rezultate au fost de atunci dovedite cu ajutorul informaticii. Totuși acest gen de metodă nu este întotdeauna foarte apreciat. O demonstrație concisă, realizată de mâna

> omului, este adesea considerată mult mai elegantă. Dacă obiectivul matematicii este acela de a înțelege obiectele abstracte pe care le manipulează, demonstrațiile umane sunt mult mai instructive și permit, în general, ca sensul profund să fie mai bine perceput.

La data de 10 martie 2016, întreaga lume și-a ațintit ochii pe Seul. Aici are loc cel mai așteptat meci de joc Go, care pune în competiție pe cel mai bun jucător din lume, coreeanul Lee Sedol și computerul AlphaGo. Partida este transmisă în direct pe internet și pe mai multe canale de televiziune, fiind urmărită de sute de milioane de persoane din întreaga lume. Atmosfera este încordată. Până în acest moment, niciodată un computer nu a bătut o ființă umană la acest nivel.

Go are reputația de a fi unul dintre jocurile cel mai dificil de învățat de către o mașină. Strategia sa cere jucătorilor să aibă o mare doză de intuiție și de creativitate. Or, dacă mașinile sunt foarte bune în a calcula, este foarte greu să găsim algoritmii care să simuleze comportamentele instinctive. Alte jocuri celebre, precum jocul de șah, sunt mult mai mult bazate pe calcul, de aceea computerul Deep Blue a reușit să îl învingă pe campionul rus de șah Garry Kasparov încă din 1997, într-un meci care a avut și el un mare răsunet. În legătură cu alte jocuri, precum cel de dame, computerele au ajuns chiar să pună la punct o strategie imbatabilă. Nicio ființă umană nu poate spera să învingă la dame un computer. Poate reuși din când în când să smulgă o remiză, atunci când se joacă impecabil. În marea familie a jocurilor de

strategie, Go rămânea deci, în 2016, ultimul care rezista asaltului mașinilor.

La capătul unei ore de joc, ne aflăm la cea de-a treizeci și șaptea mutare, iar partida pare strânsă. În acest moment AlphaGo îi va uimi pe toți specialiștii care urmăresc partida. Computerul decide să joace piesa neagră în poziția O10. Pe internet, comentatorul care analizează și decriptează mutările în direct face ochii mari, pune piesa pe masa de demonstrație, apoi o reia ezitând. Reverifică pe ecranul său și o repune la loc în cele din urmă. „Este o mișcare uimitoare!" exclamă el având un surâs perplex. „Cred că este o eroare", spune un al doilea comentator. Din cele patru colțuri ale lumii, cei mai mari specialiști ai jocului își exprimă aceeași stupefacție. Oare computerul tocmai făcuse o eroare imensă sau, din contra, una genială? Trei ore și jumătate și o sută șaptezeci și patru de mișcări mai târziu, răspunsul va veni fără drept de apel, odată cu abandonul campionului coreean. Mașina a câștigat!

După meci, epitetele nu conteneau pentru a califica faimoasa mișcare 37. Creativă! Unică! Fascinantă! Nicio ființă umană n-ar fi jucat o astfel de mișcare pe care strategiile tradiționale o considerau proastă, dar care a condus în cele din urmă la victorie. În acest caz se pune întrebarea: cum se poate ca un computer care nu face altceva decât să urmeze un algoritm scris de ființe umane să dea dovadă de creativitate?

Răspunsul la această întrebare se află în algoritmii noi de învățare. Programatorii nu l-au învățat să joace pur și simplu. Ei au învățat computerul cum să învețe să joace. De-a lungul ședințelor sale de antrenament,

AlphaGo a petrecut mii de ore de joc contra lui însuși și a identificat singur mișcările care duc spre victorie. O altă caracteristică a sa este introducerea hazardului în algoritmul lui. Combinațiile posibile la Go sunt mult prea numeroase pentru a putea fi toate calculate, chiar și de către un computer. Pentru a remedia acest lucru, AlphaGo trage la sorți căile pe care le va explora și utilizează teoria probabilităților. Computerul testează doar un mic eșantion dintre toate combinațiile posibile și, în același fel în care un sondaj estimează caracteristicile unei populații întregi pornind de la un grup mic, determină și el mișcările care au mai multe șanse de a-l conduce spre victorie. Iată, în linii mari, secretul intuiției și originalității lui AlphaGo: acela de a nu gândi în mod sistematic, ci de a cântări viitoarele mutări posibile conform probabilității acestora.

Dincolo de aceste jocuri de strategie, computerele care au algoritmi din ce în ce mai complecși și performanți par a fi în măsură astăzi să-i depășească pe oameni în cea mai mare parte a competențelor lor. Ele conduc mașini, participă la operații chirurgicale, pot crea muzică sau picta tablouri originale. Este greu să ne imaginăm o activitate umană care, din punct de vedere tehnic, să nu poată fi realizată de o mașină pilotată de un algoritm adaptat.

În fața acestor progrese fulminante, realizate în doar câteva decenii, cine știe de ce ar putea fi capabile computerele în viitor? Și cine știe dacă nu vor fi, într-o zi, în măsură să inventeze singure noi matematici? Pentru

moment, jocul matematic rămâne prea complex ca aceste mașini să-și poată da frâu liber creativității. În general, utilizarea lor rămâne tehnică și de calcul, dar poate că într-o zi un descendent al lui AlphaGo va produce o teoremă inedită care, precum mișcarea 37 a străbunului său, îi va uimi pe toți marii savanți ai planetei. Este greu să dăm un prognostic în legătură cu evoluția mașinilor de mâine, dar în mod sigur ar fi uimitor ca ele să nu ne surprindă.

17

Matematicile viitorului

Cerul este plumburiu, iar ploaia cadențează pe acoperișurile din Zürich. Ce vreme tristă în plină vară! Trenul nu ar trebui să mai întârzie mult.

Este duminică, 8 august 1897, iar pe peronul gării un om gânditor așteaptă sosirea invitaților săi. Este Adolf Hurwitz, matematician. German de origine, conduce de cinci ani Catedra de matematică a Școlii Politehnice Federale de la Zürich. În calitatea aceasta a jucat un rol important în organizarea evenimentului ce se va desfășura în următoarele trei zile. Trenul care sosește va lăsa pe peron un eșantion dintre cei mai mari oameni de știință ai lumii, veniți din șaisprezece țări diferite. Mâine se va deschide primul Congres Internațional al Matematicienilor.

Cei doi inițiatori ai acestui congres sunt germanii Georg Cantor și Felix Klein. Primul a devenit celebru descoperind existența unor infinituri mai mari decât altele și punând pe picioare teoria mulțimilor, pentru a le manipula fără a cădea în paradoxuri. Cel de-al doilea este un specialist în structurile algebrice. Chiar dacă Elveția a fost aleasă ca țară-gazdă pentru acest prim congres din rațiuni diplomatice, nu este de mirare că inițiativa a venit dinspre Germania. În secolul al XIX-lea, această țară a știut să se impună ca un nou El Dorado al matematicienilor.

Göttingen, împreună cu prestigioasa sa universitate, este centrul nevralgic unde se întâlnesc cele mai strălucite minți ale acestei discipline.

Printre cei două sute de participanți la congres se numără și mulți italieni, precum Giuseppe Peano, cunoscut pentru că a definit axiomele moderne ale matematicii, ruși precum Andrei Markov, ale cărui lucrări au revoluționat studiul probabilităților, sau francezi, precum Henri Poincaré[1], care a descoperit printre altele teoria haosului și a ceea ce vom numi mai târziu „efectul fluture". De-a lungul celor trei zile de congres, toată această lume minunată va putea discuta, schimba idei, crea legături între matematicieni și între domeniile lor de cercetare.

În acest sfârșit de secol XIX, lumea matematică este în plină metamorfoză. Expansiunea, atât geografică, precum și intelectuală a disciplinei, îi îndepărtează pe savanți unii de alții. Matematica este pe cale să devină prea vastă pentru ca un singur individ să o poată cuprinde în întregime. Henri Poincaré, cel care va deschide congresul, este uneori considerat ultimul mare savant universal, stăpânind toate domeniile matematicii din epoca sa și făcându-le să avanseze în mod semnificativ pe multe dintre acestea. Cu el se stinge specia generaliștilor, pentru a face loc specialiștilor.

Totuși, ca o reacție a acestei derive implacabile a continentelor matematice, cercetătorii se vor strădui mai mult ca niciodată să-și înmulțească ocaziile de a lucra împreună și de a face din propria disciplină un bloc indivizibil și de

[1] L-am întâlnit deja pe Poincaré. Lui îi datorăm fraza: „A face matematică înseamnă să dăm același nume unor lucruri diferite". *(N.a.)*

sine stătător. Matematica va intra în secolul XX împreună cu aceste tensiuni între cele două tendințe contradictorii.

Cel de-al doilea Congres Internațional al Matematicienilor se va derula la Paris în august 1900, apoi evenimentul își va găsi ritmul într-un congres la fiecare patru ani, excepție făcând doar câteva ediții anulate din cauza războaielor mondiale. Ultimul la care am asistat a avut loc la Seul de pe 13 până pe 21 august 2014. Cu mai mult de cinci mii de participanți veniți din o sută douăzeci de țări, acest congres a fost cel mai mare organizat vreodată. Următoarea ediție are loc la Rio de Janeiro în august 2018.

De-a lungul anilor, congresul a generat unele tradiții. Astfel se face că din 1936 se acordă prestigioasa medalie Fields. Această recompensă, adesea numită Premiul Nobel al matematicii, este cea mai înaltă distincție a disciplinei. Pe medalie e un portret al lui Arhimede, însoțit de un citat care empatizează cu matematicianul grec: *Transire suum pectus mundoque potiri* („Depășește-ți propria inteligență și devino stăpânul lumii").

Profilul lui Arhimede pe medalia Fields

Un alt efect al mondializării matematicii a fost că engleza s-a impus puțin câte puțin ca limbă internațională a disciplinei. Trebuie spus că încă de la congresul din Paris unii participanți s-au plâns că rapoartele și conferințele care erau exclusiv în limba franceză îngreunau înțelegerea participanților străini. Al Doilea Război Mondial și exodul unei mari părți dintre creierele europene spre Statele Unite și marile lor universități au contribuit din plin la această mișcare. În zilele noastre, majoritatea articolelor din cercetarea matematică sunt scrise și publicate în engleză[1].

Într-un secol, numărul matematicienilor a crescut și el în mod considerabil. În 1900 nu existau mai mult de câteva sute, în principal în Europa. Astăzi se pot număra zeci de mii, în toate cele patru colțuri ale lumii. În fiecare zi sunt publicate mai multe zeci de noi articole. Unele estimări spun că acum comunitatea matematică mondială produce în jur de un milion de noi teoreme la fiecare patru ani.

Unificarea matematicii va trece și ea printr-o reorganizare profundă a disciplinei înseși. Unul dintre artizanii cei mai activi ai acestei mișcări va fi germanul David Hilbert, profesor la Universitatea din Göttingen. Hilbert este, alături de Poincaré, unul dintre cei mai străluciți și mai influenți matematicieni ai începutului de secol XX.

---

1 Din 1991, aceste articole care vin din lumea întreagă sunt difuzate liber pe internet, *via* platforma arXiv.org, creată de Universitatea Cornell din SUA. Dacă doriți să vedeți cum arată un articol de matematică, faceți un tur pe această platformă. *(N.a.)*

În 1900, Hilbert va participa la Congresul de la Paris și va susține miercuri, 8 august, la Sorbona, o prezentare devenită celebră. Matematicianul german va prezenta aici o listă a marilor probleme nerezolvate care, după el, ar trebui să-i ghideze pe matematicienii secolului care urmează. Matematicienii adoră provocările și dau curs inițiativei. Cele douăzeci și trei de probleme ale lui Hilbert provoacă interesul cercetătorilor și nu întârzie să se răspândească și către alte persoane decât cele prezente la congres.

În 2016 rămăseseră încă nerezolvate patru dintre aceste probleme. Printre ele, a opta din lista lui Hilbert, denumită și Ipoteza lui Riemann, este considerată în general drept cea mai mare dintre conjecturile matematice ale epocii noastre. Este vorba despre găsirea unei soluții imaginare pentru o ecuație pusă la mijlocul secolului al XIX-lea de germanul Bernhard Riemann.

Dacă această ecuație este în mod special interesantă, asta se întâmplă pentru că deține cheia unui mister mult mai vechi: acela al șirului de numere prime studiate încă din Antichitate[1]. Eratostene a fost unul dintre primii care au studiat acest șir în secolul al III-lea înaintea erei noastre. Găsiți soluțiile ecuațiilor lui Riemann și veți obține numeroase informații asupra numerelor care ocupă un loc central în aritmetică!

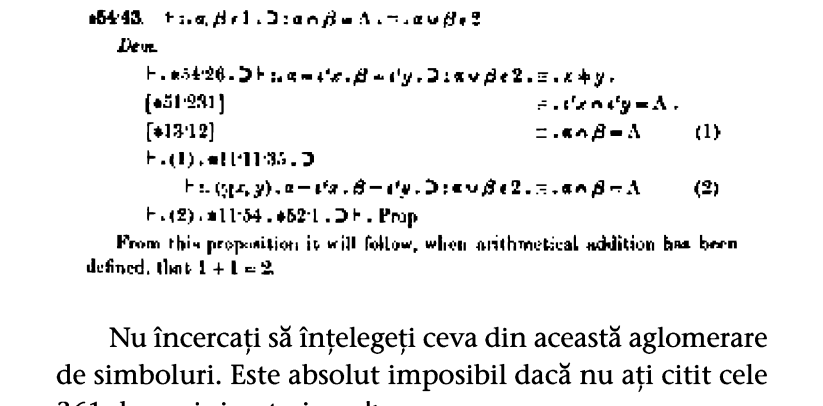
---

1 Numerele prime sunt numerele care nu pot să se scrie ca o înmulțire de două numere mai mici decât ele însele. De exemplu, 5 este un număr prim, dar nu și 6, căci 2 x 3 = 6. Șirul numerelor prime începe cu 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19... *(N.a.)*

Odată enunțate cele douăzeci și trei de probleme de către Hilbert, el va merge mai departe. În anii care urmează, matematicianul german va pune pe picioare un imens program care urmărește să așeze întreaga matematică pe același soclu solid, fiabil și definitiv. Obiectivul său constă în crearea unei teorii unice care să permită înglobarea tuturor ramurilor matematicii. Aduceți-vă aminte că de la Descartes și coordonatele sale, problemele de geometrie puteau fi exprimate într-un limbaj algebric. Într-o anumită măsură, geometria devenise o subdisciplină a algebrei. Dar era, oare, posibil să se extindă acest tip de fuziune la scara întregii matematici? Altfel spus, se putea oare găsi o superteorie în care toate ramurile matematicii să reprezinte doar cazuri particulare, de la geometrie la probabilități, trecând prin algebră sau calculul infinitezimal?

Această superteorie va vedea efectiv lumina zilei sub forma teoriei mulțimilor, propusă la sfârșitul secolului al XIX-lea de Georg Cantor. Mai multe variante de axiomatizare a acestei teorii se vor schița la începutul secolului XX. Între 1910 și 1913, britanicii Alfred North Whitehead și Bertrand Russell publică o lucrare în trei volume, intitulată *Principia Mathematica,* în care enunță axiomele și regulile logice pe baza cărora vor recrea de la zero întreaga matematică. Unul dintre pasajele celebre ale cărții, reprodus pe pagina următoare, se găsește la pagina 362 din primul volum al ediției originale. Whitehead și Russell, după ce au recreat aritmetica, au ajuns, în sfârșit, la teorema 1 + 1 = 2. Acest lucru i-a amuzat mult pe comentatorii care spuneau că au trebuit să fie sute de pagini și argumentări aproape imposibil de înțeles pentru inițiați pentru a ajunge, în cele din urmă, la o egalitate

atât de elementară. Pentru a ne delecta privirea, iată cum arată în limbajul simbolic al lui Whitehead și Russell demonstrația 1 + 1 = 2.



Nu încercați să înțelegeți ceva din această aglomerare de simboluri. Este absolut imposibil dacă nu ați citit cele 361 de pagini anterioare![1]

După Whitehead și Russell, au fost propuse alte variante de îmbunătățire a axiomelor, iar astăzi majoritatea matematicilor moderne își găsesc perfect fundamentele în cele câteva axiome de bază din teoria mulțimilor.

Unificarea va genera și o dezbatere lingvistică, deoarece mulți matematicieni au început în această perioadă să vorbească despre matematică la singular pentru disciplina lor. Nu se mai vorbește despre „matematici", ci despre „matematică". Astăzi regăsim încă destui cercetători care militează pentru singular, dar uzul limbii este mult mai puternic, iar în practică se pare că, pentru moment, nu se dorește renunțarea la acest plural[2].

---

1 Și, chiar dacă le-am citi, tot nu este destul de simplu de înțeles. *(N.a.)*

2 În limba franceză se vorbește în mod curent despre *matematici,* în timp ce în limba română termenul uzual este la singular. *(N.t.)*

În ciuda acestei reușite extraordinare a teoriei mulțimilor, Hilbert nu s-a arătat satisfăcut, deoarece încă persistau câteva îndoieli cu privire la fiabilitatea axiomelor din *Principia Mathematica*. Pentru ca o teorie să poată fi considerată perfectă, este necesar ca ea să satisfacă două criterii: să fie coerentă și completă!

Prin coerență se înțelege că teoria nu admite paradoxuri. Adică nu este posibil să dovedești un lucru și contrariul său în același timp. De exemplu, dacă una dintre axiome ne-ar permite să demonstrăm că 1 + 1 = 2, iar o alta că 1 + 1 = 3, atunci teoria este incoerentă, deoarece se contrazice pe sine. În ceea ce privește completitudinea, aceasta spune că axiomele teoriei sunt suficiente pentru a putea demonstra tot ceea ce este adevărat în cadrul său. De exemplu, dacă o teorie aritmetică nu are suficiente axiome pentru a putea demonstra că 2 + 2 = 4, atunci ea este incompletă.

Este posibil să arătăm că *Principia Mathematica* îndeplinește aceste două criterii? Am putea fi siguri că nu vom găsi niciodată paradoxuri și că axiomele sale sunt suficient de precise și puternice pentru a reuși să deducem din ele toate teoremele posibile și imaginabile?

Programul lui Hilbert primește o lovitură pe cât de brutală, pe atât de neașteptată când, în 1931, un tânăr matematician austriac, Kurt Gödel, va publica un articol intitulat *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme (Despre propozițiile formal indecidabile ale* Principia Mathematica *și ale sistemelor aferente)*. Acest articol demonstra o teoremă extraordinară, afirmând că nu poate să existe o superteorie care să fie totodată coerentă și completă. Dacă *Principia*

Mathematica prezintă coerență, atunci în mod necesar există afirmații numite indecidabile care nu pot fi în cadrul său nici demonstrabile, nici respinse. Deci, va fi imposibil să determinăm dacă ele sunt adevărate sau false.

Lovitura catastrofală a lui Gödel

Teorema incompletitudinii a lui Gödel este un monument al gândirii matematice. Pentru a încerca să-i înțelegem principiul general ar trebui să ne aplecăm mai în detaliu asupra modalității în care scriem matematica. Iată două afirmații elementare de aritmetică:

A. Adunarea a două numere pare va da întotdeauna un număr par.
B. Adunarea a două numere impare va da întotdeauna un număr impar.

Aceste două enunțuri sunt destul de clare, deci ar putea fi fără probleme scrise în limbajul algebric al lui Viète. Gândindu-ne puțin, am putea vedea că prima dintre cele două afirmații, notată A, este adevărată, în timp ce a doua, notată B, este falsă, deoarece suma a două numere impare este întotdeauna pară. Ceea ce ne conduce la următoarele alte două enunțuri:

C. Afirmația A este adevărată.
D. Afirmația B este falsă.

Aceste două noi fraze sunt un pic speciale. Ele nu sunt propriu-zis enunțuri matematice, ci sunt mai degrabă enunțuri care vorbesc despre enunțuri matematice. Propozițiile C și D, contrar lui A și B, nu pot fi scrise *a priori* în limbajul simbolic al lui Viète. Subiectele lor nu sunt nici numere, nici figuri geometrice, nici oricare alt obiect al aritmeticii, al probabilităților sau calculului infinitezimal. Ele sunt ceea ce se numesc „enunțuri metamatematice", adică enunțuri care nu vorbesc despre obiecte matematice, ci despre matematica însăși. O teoremă este matematică. Afirmația că teorema este adevărată este metamatematică.
Deosebirea poate părea subtilă și derizorie, deși printr-o formalizare incredibil de ingenioasă a metamatematicii, Gödel a putut să ajungă la teorema sa. Provocarea omului de știință austriac a fost aceea de a găsi modalitatea în care să scrie enunțurile metamatematice chiar în limbajul matematic. Datorită unui procedeu genial care permite interpretarea enunțurilor ca numere, pe lângă faptul că vorbește despre numere, geometrie sau probabilități, matematica a devenit capabilă dintr-odată să vorbească despre ea însăși.

Un lucru care vorbește despre el însuși...?! Nu vă amintește de nimic? Aduceți-vă aminte de faimosul paradox al lui Epimenide! Poetul grec afirmase într-o zi că toți cretanii sunt mincinoși. Fiind el însuși cretan, era imposibil să se determine dacă afirmația lui Epimenide era adevărată sau falsă fără

a cădea într-o contradicție. Este precum în cazul șarpelui care-și mușcă coada. Până astăzi, enunțurile matematice s-au ținut departe de acest gen de afirmații autoreferențiale. Dar cu ajutorul procedeului său, Gödel a reușit să reproducă un fenomen de același tip chiar în sânul matematicii. Iată enunțul următor:

G. Afirmația G nu este demonstrabilă cu ajutorul axiomelor teoriei.

Acest enunț este în mod clar metamatematic, dar prin ingeniozitatea lui Gödel, el poate totuși să fie exprimat în limbajul matematic. Deci s-a făcut posibilă încercarea de a demonstra G cu ajutorul axiomelor teoriei, iar în cazul acesta pot apărea două situații.

- Fie este posibil să demonstrăm G, dar în acest caz, pentru că G afirmă că nu este demonstrabilă, înseamnă că se înșală, adică este falsă. Or, dacă este posibil să demonstrăm ceva ca fiind fals înseamnă că întreaga teorie nu se susține, căci ea nu este coerentă.
- Fie nu este posibil să demonstrăm G, dar în acest caz, ceea ce spune G este adevărat, iar acest lucru semnifică faptul că axiomele noastre sunt incapabile să dovedească o afirmație care este totuși adevărată. Deci teoria este incompletă, deoarece există adevăruri care îi sunt inaccesibile.

Pe scurt, în toate cazurile suntem perdanți. Fie teoria este incoerentă, fie este incompletă. Teorema

de incompletitudine a lui Gödel a pus la pământ definitiv cele două visuri ale lui Hilbert și este inutil să încercăm să ocolim problema schimbând teoria; rezultatul său se aplică nu doar în cazul *Principia Mathematica,* ci și oricărei alte teorii care ar pretinde că poate să o înlocuiască. Nu poate exista o teorie unică și perfectă care să permită demonstrarea tuturor teoremelor sale.
Ne rămâne totuși o mică speranță. Enunțul G este, desigur, indecidabil, dar trebuie să mărturisim că nu este foarte interesant din punct de vedere matematic. Este mai mult o curiozitate care a fost fasonată pe toate părțile de Gödel pentru a putea interveni asupra punctului slab al lui Epimenide. Totuși era firesc să sperăm ca marile probleme ale matematicii, cele care sunt cu adevărat interesante, să nu cadă în capcana autoreferențialității.

Din nefericire, a trebuit ca încă o dată să i se dea dreptate lui Gödel. În 1963, matematicianul american Paul Cohen va demonstra că prima dintre cele douăzeci și trei de probleme ale lui Hilbert aparține și ea acestei stranii categorii de enunțuri indecidabile. Era imposibil să o demonstrăm sau să o respingem pornind de la axiomele din *Principia Mathematica.* Dacă această primă problemă va fi rezolvată într-o zi, în mod sigur se va întâmpla acest lucru în cadrul unei alte teorii. Dar această teorie va conține, la rândul său, alte puncte slabe și alte enunțuri indecidabile.

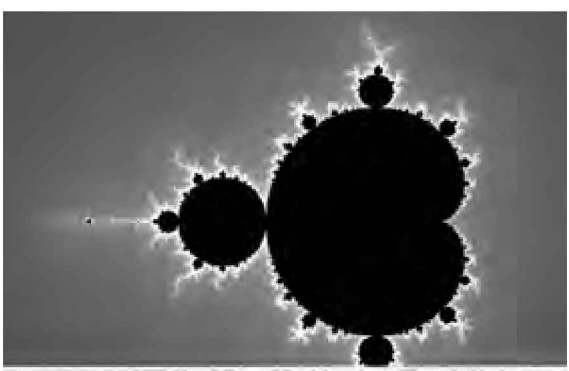
Dacă studiile asupra fundamentelor matematicii au ocupat un loc important în secolul XX, acest lucru nu a împiedicat alte ramuri ale acestei discipline să-și urmeze propriul drum. Este greu să descriem diversitatea matematicilor care s-au dezvoltat în ultimele decenii. Să ne oprim totuși câteva momente asupra uneia dintre cele mai interesante ale ultimului secol: ansamblul lui Mandelbrot.

Această creație uimitoare a apărut din analiza proprietăților anumitor șiruri numerice. Alegeți un număr, oricare doriți, apoi construiți un șir care să aibă ca prim termen pe 0, iar următorii să fie egali cu pătratul termenului precedent, căruia îi adăugăm numărul ales. De exemplu, dacă alegeți numărul 2, atunci șirul dumneavoastră va începe în felul următor: 0, 2, 6, 38, 1 446... Veți observa că $2 = 0^2 + 2$, apoi $6 = 2^2 + 2$, apoi $38 = 6^2 + 2$, apoi $1\,446 = 38^2 + 2$ și așa mai departe. Dacă în locul lui 2 alegeți numărul -1, atunci veți obține șirul 0, -1, 0, -1, 0... Acest șir alternează simplu între 0 și -1, căci $-1 = 0^2 - 1$ și $0 = (-1)^2 - 1$.

Cele două exemple ne arată că, în funcție de numărul ales, șirul obținut poate adopta două comportamente foarte diferite. Este posibil ca el să se îndrepte spre infinit, având valori din ce în ce mai mari, așa cum este cazul dacă alegem numărul 2. În același timp, este posibil ca șirul să fie limitat, adică valorile sale să nu se îndepărteze și să rămână într-o zonă restrânsă, precum este cazul cu numărul -1.

Toate numerele, fie ele întregi, cu virgulă sau chiar imaginare, pot să se aranjeze în acest caz într-una sau alta dintre cele două categorii.

Această clasificare a numerelor poate părea destul de abstractă; pentru a vizualiza mai bine lucrurile, este posibil să ne reprezentăm acest lucru în mod geometric cu ajutorul coordonatelor lui Descartes. Într-un plan, așezăm toate numerele reale pe o axă orizontală așa cum am făcut deja înainte[1], apoi numerele imaginare pe o axă verticală. Acum putem să colorăm punctele care aparțin celor două categorii cu două culori diferite. Vom obține o figură minunată.



Pe această figură, numerele colorate în negru sunt cele care generează șiruri limitate, în timp ce cu gri sunt reprezentate cele care conduc la șiruri ce tind spre infinit. O „umbră" albă a fost pusă în spatele figurii negre pentru a putea observa mai bine anumite detalii extrem de fine și câteodată invizibile cu ochiul liber.

Cum fiecare punct al imaginii corespunde calculului și studiului unui șir, desenul acestei figuri necesită

[1] Zero se află în mijloc, numerele negative la stânga și numerele pozitive la dreapta. (*N.a.*)

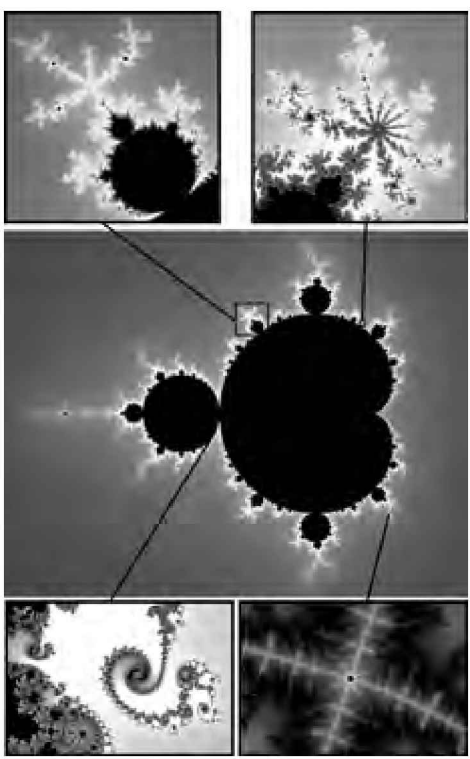
numeroase calcule. Iată de ce a trebuit să așteptăm începutul anilor 1980 ca ordinatoarele să ne permită să obținem reprezentări precise ale acestui ansamblu. Matematicianul francez Benoît Mandelbrot a fost unul dintre primii care au studiat în detaliu geometria acestei figuri căreia colegii lui au ajuns să-i dea numele său.

Ansamblul lui Mandelbrot este fascinant. Conturul său este alcătuit dintr-o dantelă geometrică incredibil de armonioasă și de precisă. Dacă măriți bordura acestei figuri veți vedea apărând întotdeauna din ce în ce mai multe motive infinit de fine și incredibil de cizelate. În realitate, este absolut imposibil să percepem pe o singură imagine toată bogăția de forme pe care le presupune ansamblul lui Mandelbrot atunci când îl disecăm în detaliu. Un mic eșantion din aceste detalii este vizibil în figura următoare.

Dar ceea ce o face și mai remarcabilă este dezarmanta simplitate a definiției sale. Dacă ar fi trebuit să recurgem la ecuații monstruoase pentru a desena această figură, la calcule savante și confuze sau la construcții abracadabrante, am fi putut spune: „Desigur, figura este frumoasă, dar ea este absolut artificială și nu prezintă mare interes". Dar nu, această figură este pur și simplu reprezentarea geometrică a proprietăților elementare ale șirurilor numerice care se definesc cu ajutorul câtorva cuvinte. Dintr-o regulă foarte simplă a luat naștere această geometrie minunată.

Acest gen de descoperire a relansat inevitabil dezbaterea asupra naturii matematicii: este ea o invenție umană sau are o existență independentă de natura

umană? Sunt matematicienii descoperitori sau creatori? La prima vedere, ansamblul lui Mandelbrot pare că pledează în favoarea descoperirii. Dacă figura capătă această formă extraordinară, acest lucru nu se întâmplă pentru că Mandelbrot a luat decizia să o construiască astfel. Matematicianul francez nu a dorit să inventeze o asemenea figură. Ea i s-a impus. Nu ar fi putut fi altceva decât ceea ce este.



Totuși este destul de ciudat să luăm în considerare existența unui obiect care nu doar că este pur abstract, ci, mai mult, interesul pentru el nu depășește cadrul imaterial al matematicii. Dacă numerele, triunghiurile sau ecuațiile sunt abstracte, acestea pot fi utile pentru a înțelege lumea reală. Nivelul de abstracție până în acest moment părea să aibă ceva în comun, chiar de departe, cu universul material. Ansamblul lui Mandelbrot pare să nu mai aibă nicio legătură directă cu lumea materială. Niciun fenomen fizic cunoscut nu are o structură care să-i semene îndeaproape sau de departe. Atunci de ce să ne interesăm de ea? Am putea așeza descoperirea lui pe același plan cu descoperirea unei noi planete, în astronomie, sau a unei noi specii de animale, în biologie? Este acesta un obiect care merită efortul să fie studiat pentru el însuși? Cu alte cuvinte, se află matematica la egalitate cu alte științe?

Mulți matematicieni vor răspunde la această întrebare, fără îndoială, cu „Da". Cu toate acestea, disciplina ocupă un loc extrem de izolat în câmpul cunoașterii umane. Una dintre rațiunile acestei singularități constă în raportul ambiguu pe care îl are matematica cu frumusețea obiectelor sale.

Este adevărat că se descoperă lucruri frumoase în aproape toate științele. Imaginile corpurilor celeste pe care ni le oferă astronomii reprezintă un astfel de exemplu. Suntem uimiți de forma galaxiilor, de cozile strălucitoare ale cometelor sau de culorile fermecătoare ale nebuloaselor. Desigur că universul este frumos, și avem norocul să fie așa, dar trebuie să spunem că nu a fost mereu astfel și nu am putut face mare lucru în sensul

acesta. Astronomii nu au încotro. Stelele sunt ceea ce sunt. Și ar fi trebuit să fie studiate, chiar dacă ar fi fost urâte. Deși definiția frumuseții și cea a urâțeniei sunt foarte subiective, nu este vorba despre asta aici.

Dimpotrivă, matematicianul pare a fi puțin mai liber. Am văzut deja acest lucru, există o infinitate de modalități de definire a structurilor algebrice și în fiecare dintre acestea există o infinitate de modalități de a defini șirurile cărora le putem studia proprietățile. Cele mai multe dintre aceste piste nu conduc spre structuri atât de frumoase precum cele ale lui Mandelbrot. În matematică, libertatea de a alege ceea ce se studiază este mult mai prezentă. În infinitatea de teorii pe care le-am putea explora le vom alege, cel mai adesea, pe cele pe care le considerăm cele mai elegante.

Acest demers pare să se apropie mai mult de unul artistic. Dacă simfoniile lui Mozart sunt atât de frumoase, acest lucru nu este o întâmplare; sunt așa deoarece compozitorul austriac a făcut astfel încât ele să fie frumoase. Din infinitatea de piese muzicale ce ar putea fi compuse, majoritatea sunt extrem de urâte. Apăsați la întâmplare pe clapele unui pian și vă veți convinge de acest lucru! Talentul artistului constă în a găsi în această infinitate aleatorie cele câteva acorduri prețioase care ne vor încânta.

În același fel, ține de talentul matematicianului să știe să găsească, în infinitatea lumii matematice, obiectele cel mai demne de interes. Dacă figura lui Mandelbrot nu ar fi fost așa de frumoasă, în mod clar matematicienii nu s-ar fi interesat atât de mult de ea. Ea ar fi rămas în anonimat printre figurile ignorate, precum toate acele simfonii urâte pe care nimeni nu le va cânta niciodată.

În acest caz, sunt, oare, matematicienii mai mult artiști decât oameni de știință? Ar însemna să mergem prea departe dacă am afirma acest lucru. Dar are întrebarea un sens? Omul de știință caută adevărul și, câteodată, găsește din întâmplare frumusețea. Artistul caută frumusețea și, câteodată, dă din întâmplare peste adevăr. În ceea ce-l privește pe matematician, el pare să uite uneori că există o diferență între cele două. El caută și una, și alta în același timp și găsește fără să vrea când pe una, când pe cealaltă. El amestecă adevărul și frumosul, utilul și superfluul, ceea ce este obișnuit și ceea ce este improbabil ca fiind tot atâtea culori care se amestecă pe pânza sa infinită.

El însuși nu înțelege prea bine ce face. Deseori chiar, matematica nu-și arată secretele și adevărata sa natură decât după mult timp de la dispariția creatorilor săi. Pitagora, Brahmagupta, al-Khw rizm , Tartaglia, Viète și toți ceilalți au inventat matematica fără să se îndoiască de tot ceea ce ea ne permite să facem astăzi. Și poate că, la rândul nostru, nu ne îndoim deloc de ceea ce ar putea să facă în secolele care vor urma. Doar timpul poate să ia distanța necesară pentru a aprecia la justa sa valoare opera matematică.

Epilog

Povestea noastră a ajuns la final.

Sau cel puțin la sfârșitul porțiunii care îmi este accesibilă acum, când scriu această carte, la începutul secolului XXI. Dar ce urmează? Este clar că istoria nu s-a încheiat!

Există un lucru pe care trebuie să-l acceptăm în momentul în care ne ocupăm de știință: cu cât se știe mai mult despre un subiect, cu atât se extinde măsura necunoașterii noastre. Fiecare răspuns pe care îl aducem ridică zece noi alte întrebări. Acest joc fără sfârșit este totodată copleșitor și încântător. Trebuie să spunem că, dacă ar fi fost posibil să cunoaștem totul, bucuria care ar fi urmat ar fi fost imediat umbrită de imensa disperare de a nu mai avea nimic de descoperit. Dar să nu ne inducem frica! Din fericire, matematica pe care o mai avem de descoperit este fără nicio îndoială cu mult mai cuprinzătoare decât cea pe care o cunoaștem deja!

Cum vor fi matematicile din viitor? Această întrebare ne dă amețeli. Este uluitor să înaintăm fără frică spre marginea cunoștințelor noastre și să aruncăm o privire peste întinderea a tot ceea ce nu cunoaștem. Pentru cel care a gustat cel puțin o dată din savoarea îmbătătoare a noilor descoperiri, chemarea teritoriilor necunoscute este, fără îndoială, mai puternică decât confortul celor cucerite. Cât de fascinantă este matematica până să fie îmblânzită! Și ce beție ne dă observarea într-o ceață îndepărtată a

ideilor brute care se mișcă liber prin savana infinită a ignoranței noastre! Dar, mai ales, ce beție ne oferă cele pe care le ghicim a fi sublime și al căror mister tulbură atât de plăcut imaginația noastră! Unele par a fi apropiate. Am putea să credem că este suficient să întindem mâna pentru a le putea culege. Altele sunt atât de îndepărtate, că va fi nevoie de generații pentru a ni le putea apropia. Nimeni nu știe ce vor descoperi matematicienii secolelor viitoare, dar putem paria că descoperirile vor fi pline de surprize.

Mai 2016. Mă plimb pe aleile *Salonului Culturii și Jocurilor Matematice* care se organizează în fiecare an în piața Saint-Sulpice, în cel de-al șaselea arondisment al Parisului. Este un loc care îmi place în mod deosebit. Aici se găsesc magicieni care explică doritorilor un truc făcut cu jocul de cărți, truc ce constă într-o proprietate aritmetică. Există sculptori care dăltuiesc în piatră structuri geometrice inspirate din solidele lui Platon sau inventatori ale căror mecanisme din lemn alcătuiesc mașini de calcul stranii. Puțin mai departe întâlnesc câteva persoane care se ocupă cu calculul razei Pământului, reproducând experiența lui Eratostene. Apoi văd standul amatorilor de origami, acela al pasionaților de jocuri logice și acela al caligrafilor. Sub un cort se joacă o piesă de teatru în care matematica și astronomia se amestecă. Se aud explozii de râsete.

Toți acești oameni fac matematică! Cu toții inventează matematică, fiecare în felul lui. Acest jongler va utiliza pentru numărul său figuri geometrice pe care niciun mare om de știință nu le-ar fi considerat demne de

interes. Dar pentru el sunt frumoase, iar mingile pe care le aruncă în aer fac ca ochii trecătorilor să strălucească.

Cred că toate acestea sunt cu mult mai îmbucurătoare decât toate descoperirile marilor savanți. Există în matematică, până și în cea mai simplă, o sursă inepuizabilă de uimire și de încântare. Printre vizitatorii salonului se găsesc mulți părinți care vin înainte de toate pentru copiii lor și care, puțin câte puțin, sunt furați și ei de jocul matematic. Niciodată nu-i prea târziu! Matematica are un potențial formidabil pentru a deveni o disciplină populară și festivă. Nu e obligatoriu să fii un matematician de geniu pentru a deveni pasionat și a gusta beția explorării și a descoperirilor.

Nu e nevoie de mare lucru pentru a face matematică, iar dacă veți avea poftă să continuați, atunci când ultima pagină a acestei cărți se va termina, veți descoperi cu mult mai multe decât ceea ce am putut să vă povestesc. Vă veți putea trasa propriul drum, vă veți forma propriile gusturi și vă veți urma propriile dorințe în matematică.

Este suficient să aveți puțină îndrăzneală, o doză consistentă de curiozitate și un pic de imaginație!

Pentru a merge mai departe

Pentru a continua explorarea matematicii, iată câteva piste care v-ar putea fi utile.

Muzee și evenimente

Departamentul de matematică al *Palais de la Découverte* din Paris (http://www.palais-decouverte.fr) propune activități, comunicări și ateliere pentru marele public. Dacă veți trece pe aici, nu ratați să faceți un tur prin faimoasa sală π. Tot la Paris, *Cité des Sciences et de l'Industrie* (http://www.cite-sciences.fr) deține, de asemenea, un spațiu dedicat matematicii.

De mici dimensiuni, dar la fel de atrăgătoare sunt: *La Maison des Maths et de l'Informatique* la Lyon (http://www.mmi-lyon.fr), Asociația *Fermat Science* (http://www.fermat-science.com) care propune activități în satul natal al lui Pierre de Fermat în La Beaumont-de-Lomagne, în apropiere de Toulouse; *l'Exploradôme* (http://www.exploradome.fr) în Vitry-sur-Seine sau la *Maison des Maths* (http://maisondesmaths.be) din Quaregnon, în Belgia.

Iar dacă veți merge în altă țară decât Franța, aveți *Mathematikum* (http://www.mathematikum.de) în Gießen, Germania, sau *MoMaths* (http://momath.org) din New York, în Statele Unite, ambele muzee consacrate exclusiv matematicii.

Toate aceste locuri sunt deosebit de interactive, iar partea frumoasă e că poți participa la o mulțime de evenimente de toate felurile.

Pe lângă aceste locuri care se pot vizita permanent, trebuie să adăugăm evenimentele punctuale, precum *Salon Culture & Jeux Mathématiques* (www.cijm.org), organizat în fiecare an la sfârșitul lunii mai la Paris. *La Fête de la Science* (http://www.fetedelascience.fr), care se ține în octombrie, și *La Semaine des Mathématiques,* din luna martie, dovedesc că de la un an la altul evenimentele se îmbogățesc aproape peste tot în Franța. *La Semaine des Mathématiques* se desfășoară, de regulă, în jurul zilei de 14 martie, de ziua lui π, și reprezintă o mare sărbătoare mondială a matematicii.

Cărți

Există foarte multe lucrări care au ca subiect matematica și o studiază la diverse niveluri de popularizare și de specializare. Cele câteva sugestii pe care vi le dau în continuare nu sunt cu siguranță exhaustive.

Martin Gardner, care a ținut între anii 1956 și 1981 rubrica de matematică din *Scientific American,* este un personaj de neocolit în matematica recreativă. Culegerile sale, precum și numeroasele cărți de magie matematică sau de enigme sunt de referință în domeniu. Printre clasici, îl putem cita și pe Yakov Perelman și faimoasa sa carte *Oh, les maths* sau pe Raymond Smullyan, cu cărțile sale de logică, precum *Le livre qui rend fou* sau *What is the*

Name of This Book? The Riddle of Dracula and Other Logical Puzzles.

Dintre autorii cei mai recenți, recomandăm cărțile lui Ian Stewart, precum *Mon cabinet de curiosités mathématiques*, pe Marcus Du Sautoy cu *La symétrie ou les maths au clair de lune,* sau pe cele ale lui Simon Singh, precum *Cartea codurilor* sau *Les Mathématiques des Simpson.* Cartea *Le beau livre des math* a lui Clifford A. Pickover ne oferă o panoramă cronologică ilustrată a celor mai spectaculoase comori ale istoriei matematicii.

Dintre autorii francezi, îl citățm în mod special pe Denis Guedj, autor a numeroase lucrări, printre care faimoasa carte polițistă istorico-matematică *Teorema papagalului.* Jean-Paul Delahaye este și el un autor inspirat în cărțile *Le Fascinant Nombre* π sau *Merveilleux nombres premiers.*

Venind dintr-un alt gen, *Teorema vie*, de Cédric Villani, transportă cititorul direct în inima cercetării matematice de astăzi, povestind cum ia naștere o teoremă.

Resurse internet

Site-ul *Image des mathématiques* (http://images.math.cnrs.fr) ne propune în mod regulat articole de popularizare a cercetărilor actuale scrise de matematicieni.

Nu ratați blogul *Choux romanesco, Vache qui rit et Intégrale curviligne* (http://eljjdx.canalblog.com) al lui El Jj, ce conține articole extrem de savuroase.

Filmele *Dimensions* (http://www.dimensions-math.org) și *Chaos* (http://www.chaos-math.org), realizate de Jos Leys, Aurélien Alvarez și Étienne Ghys vă vor face să intrați în lumea celei de-a patra dimensiuni și a haosului cu ajutorul unor animații extraordinare.

De câțiva ani, canalele de popularizare științifică se înmulțesc, în special pe YouTube. Legat de matematică, putem accesa videourile lui El Jj care completează blogul său, despre care am vorbit mai sus, precum și canalele *Science4All*, *La statistique expliquée à mon chat* sau *Passe-Science*.

Platforma *Vidéosciences* (http://videosciences.cafe-sciences.org) conține mai mult de o sută de canale din toate domeniile științifice.

Din spațiul anglofon citățm, printre altele, canalul *Numberphile* sau videourile lui *Vi Heart*.

Totodată, veți putea să căutați videourile conferințelor pentru publicul larg, oferite de cercetătorii din matematică. Matematicienii Étienne Ghys, Tadashi Tokieda sau Cédric Villani sunt extraordinari în acest sens.

Bibliografie

Am inclus în bibliografie principalele documente care m-au ajutat în scrierea acestei cărți. Atenție, unele pot fi foarte tehnice! Lista pe care am dat-o este în ordinea alfabetică a autorilor.

Legendă:

Epoca:
A: Antichitate
M: Evul Mediu
R: Renaștere
E: Epocile Modernă și Contemporană

Tema:
G: Geometrie
N: Numere/Algebră
P: Analiză/Probabilități
L: Logică
S: Alte științe

[EP] M.G. Agnesi, *Traités élémentaires de calcul différentiel et de calcul intégral*, Claude-Antoine Jombert Libraire, 1775.

D. J. Albers, G.L. Alexanderson et C. Reid, *International Mathematical Congresses, an illustrated history*, Springer-Verlag, 1987.

[AG] Archimède, *Oeuvres d'Archimède avec un commentaire par F. Peyrard*, François Buisson Libraire-Éditeur, 1854.

[AL] Aristote, *Physique*, GF-Flammarion, 1999.

[EP] S. Banach și A. Tarski, *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes*, Fundamenta Mathematicae, 1924.

[E] B. Belhoste, *Paris savant*, Armand Colin, 2011.

[EP] J. Bernoulli, *L'Art de conjecturer*, Imprimerie G. Le Roy, 1801.

[G] J.-L. Brahem, *Histoires de géomètres et de géométrie*, Éditions le Pommier, 2011.

[MN] H. Bravo-Alfaro, *Les Mayas, un lien fort entre Maths et Astronomie*, Maths Express au carrefour des cultures, 2014.

[N] F. Cajori, *A History of Mathematical Notations*, The open court company, 1928.

[RN] G. Cardano, *The Rules of Algebra (Ars Magna)*, Dover publications, 1968.

[RN] L. Charbonneau, *Il y a 400 ans mourait sieur François Viète, seigneur de la Bigotière*, Bulletin AMQ, 2003.

[AG] K. Chemla, G. Shuchun, *Les Neuf Chapitres, le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*, Dunod, 2005.

[AG] K. Chemla, *Mathématiques et culture, Une approche appuyée sur les sources chinoises les plus anciennes connues – La mathématiques, les lieux et les temps*, CNRS Éditions. 2009.

[AG] M. Clagett, *Ancient Egyptian Science A Source Book*, American Philosophical Society, 1999.

[EG] R. Cluzel et J.-P. Robert, *Géométrie – Enseignement technique*, Librairie Delagrave, 1964.

Colectiv – Department of Mathematics – North Dakota State University, *Mathematics Genealogy Project*, https://genealogy.math.ndsu.nodak.edu/, 2016.

[N] J.H. Conway et R. . Guy, *The book of Numbers*, Springer, 1996.

[E] G.P. Curbera, *Mathematicians of the world, unite !:The International Congress of Mathematicians-A Human Endeavor*, CRC Press, 2009.

J.-P. Delahaye, *Le Fascinant Nombre π*, Pour la science - Belin, 2001.

A. Deledicq *et alii*, *La Longue Histoire des nombres*, ACL - Les éditions du Kangourou, 2009.

[AG] A. Deledicq et F. Casiro, *Pythagore & Thalès*, ACL - Les éditions du Kangourou. 2009.

A. Deledicq, J.-C. Deledicq et F. Casiro, *Les Maths et la Plume*, ACL – Les éditions du Kangourou, 1996.

[M] A. Djebbar, *Bagdad, un foyer au carrefour des cultures*, Maths Express au carrefour des cultures, 2014.

[M] A. Djebbar, *Les Mathématiques arabes, L'âge d'or des sciences arabes* (colectiv), Actes Sud – Institut du Monde Arabe, 2005.

[M] A. Djebbar, *Panorama des mathématiques arabes – La mathématiques, les lieux et les temps*, CNRS Éditions, 2009.

[A] D.W. Engels, *Alexander the Great and the Logistics of the Macedonian Army*, University of California Press, 1992.

[AG] Euclide, *Les Quinze Livres des Éléments géométriques d'Euclide*, Traduction par D. Henrion, Imprimerie Isaac Dedin, 1632.

[MN] L. Fibonacci, *Liber Abaci*, extrase traduse de A. Schärlig, https://www.bibnum.education.fr/sites/ default/files/texte_fibonacci.pdf

[ES] Galilée, *The Assayer*, traducere în engleză de S. Drake. http://www.princeton.edu/~hos/h291/assayer.htm

[MG] R.P. Gomez *et alii*, *La Alhambra*, Epsilon, 1987.

[N] D. Guedj, *Zéro*, Pocket, 2008.

B. Hauchecorne și D. Surreau, *Des mathématiciens de A* à Z, Ellipses,1996.

B. Hauchecorne, *Les Mots & les Maths*, Ellipses, 2003.

[E] D. Hilbert, *Sur les problèmes futurs des mathématiques - Les 23 problèmes*, Éditions Jacques Gabay, 1990.

[EL] D. Hofstadter, *Gödel Esher Bach*, Dunod, 2000.

[AN] J. Høyrup, *L'Algèbre au temps de Babylone*, Vuibert - Adapt Snes, 2010.

[AN] J. Høyrup, *Les Origines – La mathématiques, les lieux et les temps*, CNRS Éditions, 2009.

[A] Jamblique, *Vie de Pythagore*, La roue à livres, 2011.

[N] M. Keith după E. Poe, *Near a Raven*, http:// cadaeic.net/ naraven.htm, 1995.

[MN] A. Keller, *Des devinettes mathématiques en Inde du Sud*, Maths Express au carrefour des cultures, 2014.

[MN] M. al-Khw rizm , *Algebra*, traducere în engleză de Frederic Rosen, Oriental Translation Fund, 1831.

[A] D. Laërce, *Vie, doctrines et sentences des philosophes illustres*, GF-Flammarion. 1965.

[EP] M. Launay, *Urnes Interagissantes*, Thèse de doctorat, Aix-Marseille Université, 2012.

[EG] B. Mandelbrot, *Les Objets fractals*, Champs Science, 2010.

S. Mehl, *ChronoMath, chronologie et dictionnaire des mathématiques*, http://serge.mehl.free.fr/

[M] M. Moyon, *Traduire les mathématiques en Andalus au XIIe siècle*, Maths Express au carrefour des cultures, 2014.

[EL] E. Nagel, J.R. Newman, K. Gödel și J.-Y. Girard, *Le Théorème de Gödel*, Points. 1997.

[RN] P.D. Napolitani, La *Renaissance italienne – La mathématiques, les lieux et les temps*, CNRS Éditions, 2009.

[ES] I. Newton, *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*, Dunod, 2011.

M. du Sautoy, *La Symétrie ou les Maths au clair de lune*, Éditions Héloïse d›Ormesson, 2012.

[EP] B. Pascal, *Traité du triangle arithmétique*, Guillaume Desprez, 1665.

A. Peters, *Histoire mondiale synchronoptique*, Éditions académiques de Suisse – Bâle.

[AG] Platon, *Timée*, GF-Flammarion, 1999.

[MN] K. Plofker, *L'Inde ancienne et médiévale – La mathématique, les lieux et les temps*, CNRS Éditions, 2009.

[E] H. Poincaré, *Science et Méthode*, Flammarion, 1908.

[EP] G. Pólya, *Sur quelques points de la théorie des probabilités*, Annales de l'Institut Henri Poincaré, 1930.

[AN] C. Proust, *Brève chronologie de l'histoire des mathématiques en Mésopotamie*, CultureMATH,http://culturemath.ens.fr/content/brève-chronologie-delhistoire-des-mathématiques-en-mésopotamie, 2006.

[AN] C. Proust, *Le Calcul sexagésimal en Mésopotamie*, CultureMATH, http://culturemath.ens.fr/content/le-calcul-sexagésimal-en-mésopotamie, 2005.

[AN] C. Proust, *Mathématiques en Mésopotamie, Images des mathématiques*, http://images.math.cnrs.fr/Mathematiques-en-Mesopotamie.html, 2014.

[A] Pythagore, *Les Vers d'or*, Éditions Adyar, 2009.

[EL] B. Russell și A. N. Whitehead, *Principia Mathematica*, Merchant Books, 2009.

[AN] D. Schmandt-Besserat, From accounting to Writing, în B.A. Rafoth și D.L. Rubin, *The Social Construction of Written Communication*, Ablex Publishing Co, Norwood, 1988.

[AN] D. Schmandt-Besserat, *The Evolution of Writing*, Site-ul personal al autorului https://sites.utexas.edu/dsb/, 2014.

[RN] M. Serfati, *Le Secret et la Règle, La recherche de la vérité* (colectiv), ACL – Les éditions du Kangourou, 1999.

[EL] R. Smullyan, *Les Théorèmes d'incomplétude de Gödel*, Dunod, 2000.

[EL] R. Smullyan, *Quel est le titre de ce livre ?*, Dunod, 1993.

[N] Stendhal, *Vie de Henry Brulard*, Folio classique, 1973.

[EL] A. Turing, *On computable numbers with an application to the entscheidungsproblem*, Proceedings of the London Mathematical Society, 1936.

[RN] F. Viète, *Introduction en l'art analytique*, traducere în franceză de A. Vasset, 1630.